第16卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 16 No. 4
1995年10月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct. 1995

纯量微分积分方程的周期解*

王 全 义

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 研究了线性和非线性微分积分方程的周期解的存在性、唯一性问题．在某些条件下，通过利用不动点方法，可得到这些方程存在唯一的周期解的新结果．

关键词 微分积分方程，周期解，存在性，唯一性，不动点方法

分类号 O 175.1

文〔1〕利用 Liapunov 函数研究了下列纯量 Volterra 微分积分方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+f(t) \tag{1}$$

的周期解的存在性问题．文〔2〕也研究了方程(1)的周期解的存在性及唯一性问题，并且推广了文〔1〕的有关结果．本文将研究更为广泛的一类非线性微分积分方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}g(t,s,x(s))\mathrm{d}s+f(t) \tag{2}$$

的周期解的存在性及唯一性问题，而方程(1)可作为方程(2)的特殊情形进行讨论．我们得到了一些不同于文〔1〕,〔2〕的新结果．

1 一些引理

在本节，我们先证明一些有用的引理．考虑下列周期微分方程

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=a(t)x+g_1(t), \tag{3}$$

这里 $a(t)$, $g_1(t)$ 都是连续的 T-周期函数．

引理 1 假设 $\frac{1}{T}\int_0^T a(\tau)\mathrm{d}\tau=-\alpha<0$，这里 α 是正常数，则有

$$\exp(\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau)\leqslant\beta\exp(-\alpha(t-s)),(t\geqslant s), \tag{4}$$

其中 $\beta=Me^{\alpha T}$, $M=\sup\{\exp(\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau)\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$.

证明 因对任意的 $t,s\in R$, $t\geqslant s$，有非负整数 N 使得 $(N+1)T\geqslant t-s\geqslant NT$，即 $(N+1)T+s\geqslant t\geqslant NT+s$. 于是有

$$\exp(\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau)=\exp(\int_s^{s+NT}a(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{s+NT}^t a(\tau)\mathrm{d}\tau)$$

* 本文 1994-10-18 收到；福建省自然科学基金资助项目

$$=\exp(-NT\alpha+\int_{s+NT}^{t}a(\tau)\mathrm{d}\tau)\leqslant M\exp(-NT\alpha)$$

$$\leqslant M\exp(-\alpha(t-s)+\alpha T)=\beta\exp(-\alpha(t-s)),$$

其中 $M=\sup\{\exp(\int_{s}^{t}a(\tau)\mathrm{d}\tau)\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$,$\beta=Me^{\alpha T}$. 引理1证毕. 显然在引理1中,若 $a(t)\equiv-\alpha<0$,则 $\beta=1$. 同理可证下列引理2,这里证明从略.

引理2　假设 $\frac{1}{T}\int_{0}^{T}(-a(\tau))\mathrm{d}\tau=-\alpha<0$,这里 α 是正常数,则有

$$\exp(-\int_{t}^{s}a(\tau)\mathrm{d}\tau)\leqslant\beta\exp(-\alpha(s-t)),(s\geqslant t),\tag{5}$$

其中 $\beta=Me^{\alpha T}$,$M=\sup\{\exp(-\int_{t}^{s}a(\tau)\mathrm{d}\tau)\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T\}$. 在引理2中,若 $a(t)\equiv\alpha>0$,则 $\beta=1$.

引理3　假设引理1中的条件被满足,则方程(3)存在着唯一的 T-周期解 $x(t)$ 满足

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)\mathrm{d}r)g_1(\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{6}$$

证明　先证 $x(t)$ 是有定义的,即证式(6)右端是有界的. 因为 $g_1(t)$ 是连续的 T-周期函数,故有常数 $M_1>0$,使得 $|g_1(t)|<M_1$. 由引理1知 $\left|\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)\mathrm{d}r)g_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)\mathrm{d}r)|g_1(\tau)|\mathrm{d}\tau\leqslant M_1\int_{-\infty}^{t}\beta\exp(-\alpha(t-s))\mathrm{d}s=M_1\beta/\alpha$,即式(6)右端是有界的,因此 $x(t)$ 是有定义的. 又 $x(t+T)=\int_{-\infty}^{t+T}\exp(\int_{\tau}^{t+T}a(r)\mathrm{d}r)g_1(\tau)\mathrm{d}\tau\ \underline{\underline{\tau=s+T}}\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s+T}^{t+T}a(r)\mathrm{d}r)g_1(s+T)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)\mathrm{d}r)g_1(s)\mathrm{d}s=x(t)$,故 $x(t)$ 是 T-周期的. 直接微分式(6)的两端可知 $x(t)$ 是方程(3)的解,又由方程(3)的齐次方程具有指数型二分法,故方程(3)的周期解必唯一. 引理3证毕. 同理可证下列引理4,此处证明从略.

引理4　假设引理2的条件成立,则方程(3)具有唯一的 T-周期解 $x(t)$ 满足

$$x(t)=-\int_{t}^{+\infty}\exp(-\int_{t}^{\tau}a(r)\mathrm{d}r)g_1(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{7}$$

引理5　假设 $g(t,s,x)$ 在 $R\times R\times R$ 上连续且满足下列条件:(1) 对任意的 $t,s\in R$,$x\in R$,有 $g(t+T,s+T,x)=g(t,s,x)$;且 $\int_{-\infty}^{t}|g(t,s,o)|\mathrm{d}s$ 对 $t\in R$ 有界;(2) 存在一个非负连续函数 $b(t,s)$,满足 $b(t+T,s+T)=b(t,s)$(对任意的 $t,s\in R$)及 $\int_{-\infty}^{t}b(t,s)\mathrm{d}s$ 有界,使得对任意的 $t,s\in R$,$x_1,x_2\in R$,有

$$|g(t,s,x_1)-g(t,s,x_2)|\leqslant b(t,s)|x_1-x_2|,\tag{8}$$

则对任意的连续 T-周期函数 $u(t)$,$g_2(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t,s,u(s))\mathrm{d}s$ 也是连续的 T-周期函数.

证明　先证 $g_2(t)$ 是有定义的. 因为 $u(t)$ 是连续的 T-周期函数,故有常数 $M_2>0$ 使得 $|u(t)|<M_2$. 于是

$$\left|\int_{-\infty}^{t}g(t,s,u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_{-\infty}^{t}|g(t,s,u(s))|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{t}(|g(t,s,u(s))-g(t,s,o)|+|g(t,s,o)|)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{t} b(t,s)|u(s)|\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t} |g(t,s,o)|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant M_2 \int_{-\infty}^{t} b(t,s)\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{t} |g(t,s,o)|\mathrm{d}s,$$

从而由引理的条件，知 $g_2(t)$ 是有界的. 又由引理的条件，知 $g(t+T,s+T,u(s+T))=g(t,s,u(s+T))=g(t,s,u(s))$，从而

$$g_2(t+T) = \int_{-\infty}^{t+T} g(t+T,s,u(s))\mathrm{d}s$$

$$\underline{\underline{s=\tau+T}} \int_{-\infty}^{t} g(t+T,\tau+T,u(\tau+T))\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} g(t,\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau = g_2(t).$$

又由 g 的连续性可知 $g_2(t)$ 是连续的 T-周期函数.

2 主要结果及其证明

考虑下列非线性微分积分方程

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} g(t,s,x(s))\mathrm{d}s + f(t), \tag{9}$$

其中 $a(t)$ 和 $f(t)$ 都是 R 上的连续的 T-周期函数，$x\in R$，$g(t,s,x)$ 在 $R\times R\times R$ 上连续.

定理1　对于方程(9)，假设 $a(t)$ 和 $g(t,s,x)$ 分别满足引理2及引理5中的所有条件，并且引理5中的函数 $b(t,s)$ 满足 $\int_{-\infty}^{t} b(t,s)\mathrm{d}s \leqslant K$，这里 $0\leqslant K<\alpha/\beta$，$\alpha,\beta$ 由引理2中给定. 则方程(9)存在着唯一的 T-周期解.

证明　设 $D=\{u(t)\,|\,u(t)$ 为 R 上的连续的 T-周期函数$\}$，则 D 在范数 $\|u\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\{|u(t)|\}$ 下是一个 Banach 空间. 对任意的 $u\in D$，由引理5知，$g_2(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t,s,u(s))\mathrm{d}s$ 是连续的 T-周期函数. 因此对任意的 $u\in D$，考虑下列周期微分方程

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} g(t,s,u(s))\mathrm{d}s + f(t), \tag{10}$$

由引理4可知方程(10)存在着唯一的 T-周期解

$$x_u(t) = -\int_{t}^{+\infty} \exp\left(-\int_{t}^{\tau} a(r)\mathrm{d}r\right)\left(\int_{-\infty}^{\tau} g(\tau,s,u(s))\mathrm{d}s + f(\tau)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

现在定义算子 $F:D\to D$ 如下

$$F\dot{u}(t) = x_u(t),\ (\forall\ u\in D), \tag{12}$$

易见算子 F 在 D 中的不动点就是方程(9)的 T-周期解. 下面证明算子 F 在 D 中是压缩的. 事实上，对任意的 $u_1 . u_2\in D$，由定理的条件及式(11)，(12)可得

$$|Fu_1(t) - Fu_2(t)| = \left| -\int_{t}^{+\infty} \exp\left(-\int_{t}^{\tau} a(r)\mathrm{d}r\right)\int_{-\infty}^{\tau} [g(\tau,s,u_1(s)) - g(\tau,s,u_2(s))]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \right|$$

$$\leqslant \int_{t}^{+\infty} \exp\left(-\int_{t}^{\tau} a(r)\mathrm{d}r\right)\int_{-\infty}^{\tau} |g(\tau,s,u_1(s)) - g(\tau,s,u_2(s))|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \int_{t}^{+\infty} \exp\left(-\int_{t}^{\tau} a(r)\mathrm{d}r\right)\int_{-\infty}^{\tau} b(\tau,s)|u_1(s) - u_2(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant\beta\|u_1-u_2\|\int_t^{+\infty}\exp(-\alpha(\tau-t))\int_{-\infty}^{\tau}b(\tau,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant K\beta\|u_1-u_2\|\int_t^{+\infty}\exp(-\alpha(\tau-t))\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{K\beta}{\alpha}\|u_1-u_2\|.$$

因此$\|Fu_1-Fu_2\|\leqslant\frac{K\beta}{\alpha}\|u_1-u_2\|$. 由于$K<\alpha/\beta$,因此$K\beta/\alpha<1$,从而$F$在$D$中是压缩的. 由此可知$F$在$D$中具有唯一的不动点,因此方程(9)存在着唯一的$T$-周期解. 定理1证毕. 考虑下面 Volterra 微分积分方程

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}c(t,s)x(s)\mathrm{d}s+f(t), \tag{13}$$

其中$x\in R$;$a(t)$,$f(t)$仍为连续的T-周期函数;$c(t,s)$在$R\times R$上连续,并且对任意的$t,s\in R$有$c(t+T,s+T)=c(t,s)$且$\int_{-\infty}^{t}|c(t,s)|\mathrm{d}s$有界.

推论1 假设$a(t)$满足引理2的条件且$\int_{-\infty}^{t}|c(t,s)|\mathrm{d}s\leqslant K$,这里$o\leqslant K<\beta/\alpha$;$\beta,\alpha$由引理2中给定. 则方程(13)存在着唯一的$T$-周期解.

证明 令$g(t,s,x(s))=c(t,s)x(s)$,$b(t,s)=|c(t,s)|$,则易知此时定理1的所有条件都被满足,因此由定理1知方程(13)具有唯一的T-周期解. 推论1证毕.

定理2 对于方程(9),假设$a(t)$和$g(t,s,x)$分别满足引理1及引理5中的所有条件,并且引理5中的函数$b(t,s)$满足$\int_{-\infty}^{t}b(t,s)\mathrm{d}s\leqslant K$,这里$0\leqslant K<\beta/\alpha$;$\alpha,\beta$由引理1中给定. 则方程(9)存在着唯一的$T$-周期解.

证明 利用引理1,2及5,此定理的证明与定理1的证明类似,此处证明从略.

推论2 假设$a(t)$满足引理1的条件且$\int_{-\infty}^{t}|c(t,s)|\mathrm{d}s\leqslant K$,这里$0\leqslant K<\beta/\alpha$;$\alpha,\beta$由引理1中给定. 则方程(13)存在着唯一的$T$-周期解.

此推论的证明与推论1的证明类似,此处证明从略.

3 举例

在本节,我们举出几个例子说明定理的应用.

例1 考虑下列 Volterra 微分积分方程

$$\dot{x}(t)=-(1+2\sin t)x(t)+K_0\int_{-\infty}^{t}\exp(-(t-s))x(s)\mathrm{d}s+\cos t, \tag{14}$$

这里$x\in R$,K_0是一个正常数,且$0<K_0<\exp(-(\pi/3+2\sqrt{3}))$,$a(t)=-(1+2\sin t)$和$f(t)=\cos t$都是连续的$2\pi$-周期函数;$c(t,s)=K_0\exp(-(t-s))$在$R\times R$上连续,且$C(t+2\pi,s+2\pi)=C(t,s)$. 因$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[-(1+2\sin t)]\mathrm{d}\tau=-1<0$,所以$\alpha=1$.

$$\beta=e^{2\pi}\sup\{\exp(-\int_s^t(1+2\sin\tau)\mathrm{d}\tau),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi\}=e^{2\pi}\exp(-\int_{7\pi/6}^{11\pi/6}(1+2\sin\tau)\mathrm{d}\tau)$$

$$=\exp(2\pi-4\pi/6+2\sqrt{3})=\exp(\pi/3+2\sqrt{3}),$$

$$\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s = K_0\int_{-\infty}^{t}\exp(-(t-s))\mathrm{d}s = K_0 < \alpha/\beta,$$

故方程(14)满足推论2的所有条件.因此由推论2知方程(14)存在着唯一的2π-周期解.易见文〔2〕定理1是不能判断本文例1的2π-周期解的存在性;同样本文推论2也不能判断文〔2〕中例1的2π-周期解的存在性.因此,文〔2〕定理1与本文推论2是互不包含的;同样文〔2〕的定理2与本文的结果也是互不包含的.

例2　考虑下列非线性微分积分方程

$$\dot{x}(t) = -(1+2\sin t)x(t) + K_0\int_{-\infty}^{t}\exp(-(t-s))\cos x(s)\mathrm{d}s + \sin t, \tag{15}$$

这里 K_0是正常数,且$0<K_0<\exp(-(\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}))$.只要取 $b(t,s)=K_0\exp(-(t-s))$,容易验证方程(15)满足定理2的所有条件,因此由定理2可知方程(15)存在着唯一的2π-周期解.

例3　考虑下列非线性微分积分方程

$$\dot{x}(t) = (1+2\sin t)x(t) - K_0\int_{-\infty}^{t}\exp(-(t-s))\sin t\sin x(s)\mathrm{d}s + \cos t, \tag{16}$$

这里$0<K_0<\exp(-(\pi/3+2\sqrt{3}))$;取 $b(t,s)=K_0\exp(-(t-s))|\sin t|$,容易验证方程(16)满足定理1的所有条件.因此,由定理1可知方程(16)存在着唯一的2π-周期解.

参　考　文　献

1　黄启昌.具无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性.中国科学(A 辑),1984,(10):882～889

2　王全义.纯量 Volterra 积分微分方程的周期解.华侨大学学报(自然科学版),1994,15(2):127～131

3　李森林,温立志.泛函微分方程.长沙:湖南科学技术出版社,1987.465～471

Periodic Solutions of Scalar Integrodifferential Equations

Wang　Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　A Study is made on the periodic solutions of linear and nonlinear integrodifferential equations. In relation to the existence and uniqueness of the periodic solutions of these equations, some new results are obtained by fixed point method under certain conditions.

Keywords　integrodifferential equation, periodic solution, existence, uniqueness, fixed point method