

在复杂边值条件下非稳态肋片传热的最优化(I)*

樊未军 杨翔翔

(华侨大学化工与生化工程系, 泉州 362011)

摘要 研究了在辐射和对流同时作用下肋根温度作周期性变化时矩形肋片的传热特性. 首先建立了在这种复杂边值条件下肋片传热的数学模型, 导出相应的主控微分方程式, 求解了经简化后方程的精确解, 分析了肋片的温度分布随肋高、时间和毕渥准则数等因素变化的规律.

关键词 边值条件, 非稳态, 最优化

分类号 TK 124

张玉文等人对在辐射和对流条件下直肋散热进行了数值计算. 李亮斌等人^[1~3]进一步研究了辐射和对流条件下肋片传热的最优化, 但是他们都只考虑肋根温度为常数时的情况. 后来, 何宏舟等人^[4]对肋根温度作周期性变化的梯形肋片作了研究, 但是又忽略了肋片辐射换热的影响. 综上所述, 本文拟对辐射和对流同时作用下肋根温度作周期性变化的复杂边值条件下矩形肋片传热特性进行研究, 并以此为基础作进一步的优化设计.

1 数学模型的建立

1.1 几点假设

为了便于研究特作如下假设: (1) 无限长的矩形直肋片一维导热; (2) 肋间为透明介质; (3) 热特性参数 k, h 为常数; (4) 肋片为漫灰体; (5) 无内热源, 肋片端部绝热; (6) 环境温度 T_f ; (7) 肋根温度 T_w 按余弦规律作周期性变化, $T_w = T_m + A' \cos \omega \tau$.

1.2 主控微分方程式的推导

建立如附图所示的坐标系, 列出能量平衡方程式

$$q_y(y) = q_s(y) + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + 2q_r(y) + \rho cb \cdot dy \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$q_y = -kb \cdot \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2)$$

化简上述方程, 可得

$$\rho cb \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = kb \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - [2h(T - T_f) + 2q_r(y)], \quad (3)$$

* 本文 1994-11-12 收到; 振兴中华教育科学基金会启动基金资助项目

边界条件为

$$\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=H} = 0, T_w|_{y=0} = T_m + A' \cos \omega \tau.$$

1.3 辐射换热量的求解

根据辐射理论可知,净辐射能 $q_r(y)$ 为物体所发射的能量与投射到它上面而被吸收的辐射能之差,肋面的有效辐射能 $B(y)$ 为肋面所发射的能量与它吸收外来的辐射能后再反射出去的辐射能之和,即

$$q_r(y) = \varepsilon \sigma T^4 - \alpha' R, \quad (4)$$

$$B(y) = \varepsilon \sigma T^4 + \rho' R, \quad (5)$$

消去 R 可得

$$q_r(y) = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} [\sigma T^4 - B(y)], \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} B(y) = & q_r(y) + \int_0^H B(y) dF_{dA_y-dA_{y'}} + \sigma T_1^4 dF_{dA_y-A_0} \\ & + \int_0^L B_w(z) dF_{dA_y-dA_x}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$B_w(z) = \varepsilon \sigma T_w^4 + (1 - \varepsilon) [2 \int_0^H B(y) dF_{dA_x-dA_y} + \sigma T_1^4 dF_{dA_x-A_0}]. \quad (8)$$

1.4 角系数的计算

(1) 两个微元面角系数的计算

$$dF_{d_1-d_2} = \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_z}{\pi L^2},$$

经积分并化简后可得

$$dF_{d_1-d_2} = \frac{1}{2} d(\sin \varphi).$$

(2) 分别求解肋片对不同方位的角系数

(a) 肋片对肋片的角系数

$$dF_{dA_y-dA_{y'}} = \frac{1}{2} \cdot 1/L \cdot \left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + (y - y')^2}} \right)^3 dy',$$

(b) 肋片对底面的角系数

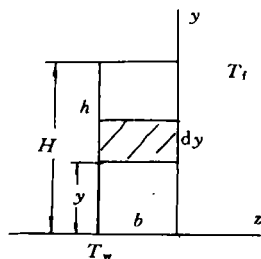
$$dF_{dA_y-dA_x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y \cdot z \cdot dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}},$$

(c) 底面对肋片的角系数

$$dF_{dA_x-dA_y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y \cdot z \cdot dy}{(y^2 + z^2)^{3/2}},$$

(d) 肋片对肋间上部空间的角系数

$$dF_{dA_y-A_0} = \frac{L}{2L + H},$$



附图 肋片截面示意图

(e) 底面对肋间上部空间的角系数

$$dF_{dA_x-A_0} = \frac{L}{L+2H}.$$

2 主控微分方程式的求解

对方程式(3), 可重写如下

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{k}{\rho c} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho c b} [2h(T - T_f) + 2q_r(y)],$$

设无量纲量为 $\theta = \frac{T - T_f}{T_m - T_f}$, $n_1 = \frac{k}{\rho c}$, $N_2 = \frac{2h}{\rho c b}$, $N_3 = \frac{2}{\rho c b T_m}$.

由此可将方程式化简为

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = N_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - N_2 \theta - N_3 q_r(y), \quad (9)$$

边界条件为

$$\theta(0, \tau) = 1 + \frac{A'}{A_m} \cos \varepsilon \tau,$$

设 $\varepsilon_a = \frac{A'}{A_m}$, 其中 A_m 代表肋片根部为平均温度 $(T_m - T_f)$ 下的波动幅度参数.

则当 $y=0$ 时, $\theta(0, \tau) = 1 + \varepsilon_a \cos \omega \tau$, (10)

当 $y=H$ 时, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$, (11)

当肋片温度不是太高的情况下, 热辐射沿肋高的变化不是太大时, 可以先假设 $q_r(y)$ 为常数, 以便使问题的求解得到简化. 因此, 设 $q_r(y) = q_r$, 此时方程式(9)为线性微分方程, 可以应用分离变量及叠加原理来处理. 设 $\theta(y, \tau)$ 可分解为稳态部分 $\theta_1(y)$ 和非稳态的波动部分 $\theta_2(y, \tau)$. 即假设式(9)有形如下式的解

$$\theta(y, \tau) = \theta_1(y, \tau) + \theta_2(y, \tau), \quad (12)$$

把式(12)代入式(9), 整理后可得

$$(N_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} - N_2 \theta_1 - N_3 q_r) + (N_1 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} - N_2 \theta_2) = \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}, \quad (13)$$

于是式(13)可分解为下列两个方程式

$$N_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} - N_2 \theta_1 - N_3 q_r = 0, \quad (14)$$

边界条件为

$$y = 0, \quad \theta = 1 \text{ 和 } y = H, \quad \frac{d\theta_1}{dy} = 0,$$

和

$$N_1 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} - N_2 \theta_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}, \quad (15)$$

边界条件为

$$y = 0, \quad \theta_2 = \varepsilon_a \cos \omega \tau \text{ 和 } y = H, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0.$$

方程式(14)是一个二阶常微分方程,其通解为

$$\theta_1 = \frac{1-c_3}{1+e^{2r_1H}}e^{2r_1y} + \frac{e^{2r_1H}(1-c_3)}{1+e^{2r_1H}}e^{-r_1y} - \frac{N_3}{N_2}q_r, \quad (16)$$

方程式(15),由于边界条件为周期性变化,所以可以假设有形如下式的解为

$$\theta_2 = \epsilon_a \varphi(y) e^{i\omega\tau} \quad (17)$$

边界条件为

$$\text{当 } y=0 \text{ 时, } \theta_2(0, \tau) = \epsilon_a \varphi(y) e^{i\omega\tau},$$

$$\text{当 } y=H \text{ 时, } \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0,$$

最后,可得方程式(15)的解为

$$\theta_2 = \epsilon_a \cdot \left(\frac{e^{r_1y}}{1+e^{2r_1H}} + \frac{e^{2r_1H}}{1+e^{2r_1H}}e^{-r_1y} \right) \cos \omega\tau. \quad (18)$$

因此,方程式(9)的精确解为

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{E \cdot e^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{B_1 \cdot L}}}{1 + e^{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{B_1 \cdot L}}} + \frac{E \cdot e^{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{B_1 \cdot L}} \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{B_1 \cdot L} \cdot y}}{1 + e^{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{B_1 \cdot L}}} - Q_r, \quad (19)$$

式中

$$Q_r = \frac{N_3}{N_2}q_r; E = (1 + \epsilon_a \cos \omega\tau + Q_r); L = \frac{H}{b}; B_1 = \frac{hH}{k}.$$

3 分析与结论

对于这个精确解 θ ,我们特作如下分析.

3.1 θ 随肋高 y 的变化关系

由于 $\frac{d\theta}{dy}$ 在区间 $[0, 1]$ 是小于等于 0 的,也即 θ 在 $[0, 1]$ 上最随 y 递减的. 又由于 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} > 0$, 说明肋片温度是沿肋高愈来愈小. 又因为, $\frac{\partial \theta}{\partial y}|_{y=0} < 0$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}|_{y=1} = 0$. 所以沿肋片高度方向的温度梯度的绝对值是愈来愈小.

3.2 θ 与辐射换热热量 q_r 的关系

经过分析可以证实, q_r 对肋片温度分布的影响甚为强烈,但是,当肋片高度增加时,辐射对温度分布的影响减弱.

3.3 θ 与时间 τ 的变化关系

当 $\omega\tau$ 在区间 $[2\pi n, 2\pi n + \pi]$ 和 n 为整数时, $\epsilon_a \cos \omega\tau$ 从 $+\epsilon_a$ 减小到 $-\epsilon_a$. 在这个时间里,对于某一固定的 y 来说, θ 随时间的增大而减少,当 $\omega\tau$ 在区间 $[2\pi n + \pi, 2\pi n + 2\pi]$ 和 n 为整数时, $\epsilon_a \cos \omega\tau$ 从 $-\epsilon_a$ 减小增至 $+\epsilon_a$. 此时对某一个固定的 y 来说, θ 随时间的增大而增大,这种变化是以 2π 为周期的.

3.4 θ 与毕渥准则数 B_1 的关系

分析表明, θ 是 α 的递减函数. 此处 $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{B_1 \cdot L} = \sqrt{2B_1 \cdot L}$, 所以 θ 又是 B_1 的递减函数. 当 B_1 增加时, θ 必然减小,即当对流换热系数增加时或导热系数降低时, θ 就减小.

综上所述可知,在辐射和对流同时作用下肋根温度作周期性变化时,肋片的温度分布受辐射换热的影响甚为强烈,但随肋高增加其影响减弱.实际上,辐射换热量是随肋高而变化的,并非常数,因此上述结论只是一种特例.当 $q_r(y)$ 随 y 变化时,进行数学精确解已不可能,必须借助数值计算方法进行求解.将在下文论述.

文中符号分别为 $B(y)$ 肋片肋面的有效辐射, W ; B_i 毕渥准则; b 肋片根部厚度, m ; c 比热, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$; A' 肋片温度波动的幅度系数; $dF_{dA_y-A_y'}$ 对 dA_y' 的角系数; $dF_{dA_y-A_0}$ 对 A_0 的角系数; $dF_{dA_y-dA_x}$ 对 dA_x 的角系数; $dF_{dA_x-dA_y}$ 对 dA_y 的角系数; $dF_{dA_x-A_0}$ 对 dA_0 的角系数; H 肋高, m ; h 对流换热系数, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$; k 导热系数, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$; L 肋间距, m ; q_r 辐射热流密度, W ; q_h 总的对流换热量, W ; T 肋片温度, K ; T_f 环境温度, K ; T_m 肋根平均温度, K ; T_w 肋片根部温度, K ; α' 吸收率; ϵ 黑度; ϵ_a 相对的肋片温度波动幅度系数; ρ 密度, $kg \cdot m^{-3}$; ρ' 反射率; σ 玻尔兹曼常数, $W \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}$; τ 时间变量, s ; ω 波动频率; θ 无因次肋片温度.

参 考 文 献

- 1 杨翔翔. 热特性参数可变时环形肋片传热的最优化研究(Ⅰ)不同截面环肋传热的比较. 华侨大学学报(自然科学版), 1987, 8(3): 312~318
- 2 杨翔翔. 热特性参数可变时环形肋片传热的最优化研究(Ⅱ)不变插值原理及其应用. 华侨大学学报(自然科学版), 1987, 8(4): 452~457
- 3 李亮斌, 杨翔翔. 在辐射和对流条件下肋片传热的最优化研究. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(4): 447~453
- 3 何宏舟. 复杂边界条件下的传热研究:[学位论文]. 泉州: 华侨大学化工与生化工程系, 1993

Optimization of Unsteady Heat Transfer of a Fin under Complex Boundary Value Conditions (I)

Fan Weijun Yang Xiangxiang

(Dept. of Chem. & Biochem. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The heat transfer performance of a rectangular fin during periodic fin base temperature change is studied under simultaneous action of radiation and convection. The first part includes a mathematical modeling of finned heat transfer under this boundary conditions; a derivation of corresponding main control differential equation; and a precision solution of equation under simplified way; and the regular pattern of the change of heat distribution with fin length and time and Biot's criterion measure.

Keywords boundary value condition, unsteady, optimization