

# 论过程控制系统的次优化方法\*

## (I)次优化时间控制

王永初

(华侨大学精密机械工程系, 泉州 362011)

**摘要** 最优时间控制是现代过程控制的一项重要研究内容. 本文论证次时间优化系统的组成及其鲁棒性, 以及次优化时间控制的开关函数的适用性. 证明无论是稳定性、自适应性或调节输出的平滑性, 其次优化时间控制均有良好的品质, 因而次时间优化实施方法具有工程的实用性.

**关键词** 最优控制, 时间切换控制, 鲁棒性

**分类号** TB 114.2

现代控制理论以对象模型: 状态方程式  $\dot{X}(t) = Ax + Bu$ , 观测方程式  $Y(t) = CX(t)$  为基础, 以 Achermann 可观测性与可控制性分析为手段<sup>[1]</sup>, 研究状态最优反馈  $u = -Kx$  或最优系统零、极点校正的实施方法, 使控制目标函数  $J(x, u) = \int_0^{T_s} (X^T R X + u^T Q u) dt \rightarrow \text{最小}$ , 以确定最优控制决策  $u^*$ . 这种方法很完善, 但在生产过程控制中至今应用甚少. 近多年来不少学者开始转向研究比较实用的次优化(或称准优化)方法<sup>[2]</sup>. 作者曾较系统地研究高稳定性、高自适应性工程系统的实施控制方法, 以期获得高鲁棒性的系统和节能效果.

生产过程的优化不能严格遵循现代控制理论的最优化设计, 而是利用其中的一部分方法, 或在部分控制程序上应用最优控制方法, 这些可称为次优化. 次优化与最优化只差一步之遥, 我们认为, 次优化的控制效果不一定比纯数学的最优化差, 应该认为是在实际可能限制条件下的最优化. 例如, 极值控制, 就是寻找某种泛函的极值, 当极值点  $(x^*, u^*)$  落在  $X_{\min} < X < X_{\max}$  与  $U_{\min} < U < U_{\max}$  范围之外, 只能在卡边控制的边界上寻找距  $(x^*, u^*)$  点最近的准极值点  $(\hat{X}, \hat{U})$  代替. 又如最优时间控制(或称最短时间控制)是按被控制状态所处的位置分区, 不同分区或执行  $U=1$  或  $U=-1$  的控制, 并以  $n$  (设对象阶次为  $n$ ) 次切换操作控制, 达到状态空间的原点. 它要求分区十分严格与准确, 否则系统会失控(趋于不稳定), 这在对象特性变化时, 是十分危险的. 因此, 时常加入一个高稳定性的操作区, 使按最优时间模型控制转变为可以实际应用的双模控制, 这是一种认识的深化. 所以最优化控制应与实际条件结合, 才有望获得在生产过程自动化系统中的应用.

\* 本文 1994-09-06 收到

# 1 次时间优化控制

如果一个系统的对象状态方程式

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

满足可控性判断矩阵为满秩,即

$$\text{rank} M = \text{rank}[B : AB : \cdots : A^{n-1}B] = n, \quad (2)$$

则最优化时间的控制  $u^*$  由下式哈密顿函数条件决定

$$H(x, p, u, t) = 1 + p^T [AX(t) + Bu(t)]. \quad (3)$$

由此解得

$$U^*(t) = \begin{cases} U_{\max} & P^T B < 0, \\ -U_{\max} & P^T B > 0, \\ 0 & P^T B = 0. \end{cases} \quad (4)$$

由于过程控制系统正常控制输出  $U(t)$ , 选择在系统信号的中间点, 即  $U(t) = (U_{\max} - U_{\min})/2$ . 若取  $U(t)$  作为系统信号的零位, 则式(4)可改写成

$$U^*(t) = \begin{cases} 1 & P^T B < 0, \\ -1 & P^T B > 0, \\ 0 & P^T B = 0. \end{cases} \quad (5)$$

假如对象的阶次为  $n$ , 则可在  $n$  维空间中昼出一系列在  $u=1$  或  $u=-1$  作用下的状态变化曲线(或曲面), 其中一条通过状态空间原点的曲线(或曲面)称为开关曲线(或曲面). 时间最优控制依照式(5)条件不断更换  $U^*(t)$  值, 更换次数  $i=n-1$ . 时间优化控制的困难: (1) 状态曲线要求按十分准确的对象数学模型进行绘制, 当  $n$  (即维数)很高时, 计算工作量异常庞大; (2) 过程对象受外扰或环境条件影响容易变化, 要求设计控制系统的同时设计自辨识模型, 这也是一个十分复杂的工作; (3) 对象模型的微小摄动, 不仅控制结果达不到状态空间的原点(即消除一阶到  $n$  阶控制误差), 而且使系统趋于不稳定. 次优化时间控制就是针对上述问题提出的. 它在控制性能方面, 接近于最优化时间的控制. 其基本观点: (1) 利用二阶模型优化拟合方法, 拟合对象高阶模型. 这样在一个二维平面上就可以制作开关曲线, 比制作高维开关曲面要方便得多, 且实用性好; (2) 控制输出原理上仅需切换一次, 从而避免系统频繁操作, 调节过程的平滑性好; (3) 以  $|e| \leq \epsilon_e$ ;  $|\dot{e}| \leq \epsilon_{\dot{e}}$  设置 PID 调节区, 当控制偏差  $(e, \dot{e})$  落在  $(\epsilon_e, \epsilon_{\dot{e}})$  区域内, 自动地由时间优化控制转向 PID 控制. 这样系统既保留了时间最优控制的快速性, 又保留了 PID 控制的高稳定性和对象模型参数微变的自适应性, 大大增加了系统的鲁棒性. 图 1 表示次优化时间控制的状态控制与

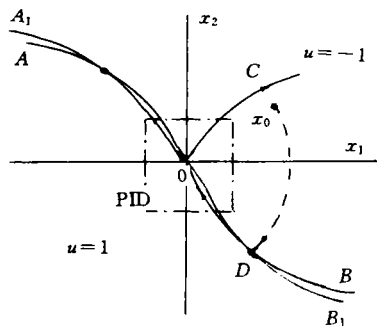


图 1 优化时间控制区域划分

转换区间,  $e \triangleq X_1, \dot{e} \triangleq \dot{X}_1 \triangleq X_2$ . 二阶准优化开关曲线  $AOB$  将  $X_1X_2$  平面划分成  $u=-1$  ( $AOB$  曲线上方) 与  $u=1$  ( $AOB$  曲线下方) 两个作用区域. 当系统状态处于图中  $X_0$  位置时实施  $u=-1$  控制, 使系统状态以最快调节速度趋于  $D$  点状态.  $D$  为状态切换点, 此时改实施  $u=1$  控制, 则系统状态沿着  $DO$  线趋于状态空间的原点  $(X_1, X_2) = (0, 0)$ . 但当对象特性稍微改变, 系统的实际开关曲线由  $AOB$  变成  $A_1OB_1$ , 经  $D$  点控制  $u$  切换后会趋于不稳定 (沿  $B_1DC$  曲线变化), 设置 PID 作用区可避免此现象发生.

## 2 次优化开关曲线

最优时间控制系统设计的一个关键是制定多阶对象降阶至典型二阶的准开关函数. 若记规范的二阶降阶传递函数为

$$G(s) = K_0 / (\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1), \quad (6)$$

写成状态方程式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} X_2 - \frac{X_1}{\alpha_2} + \frac{K_0}{\alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

若设  $Z = X_1 - K_0, W = X_2$ , 代入上述方程, 由两式相除可得

$$\frac{dW}{dZ} = -\frac{1}{\alpha_2} \cdot \frac{1 + \alpha_1 W/Z}{W/Z}. \quad (8)$$

再设  $H = W/Z$ , 则式(8)可写成

$$\frac{-\alpha_2 H}{\alpha_2 H^2 + \alpha_1 H + 1} dH = \frac{dZ}{Z}. \quad (9)$$

式(9)两边积分, 并代入替换的原变量, 可求得开关函数满足如下方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1}{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}} \arctan \left[ \frac{x_2 / (x_1 - k_0) + \alpha_1 / 2\alpha_0}{\sqrt{1/\alpha_2 - \alpha_1^2 / 4\alpha_2^2}} \right] \\ & - \frac{1}{2} \ln \left| \left( \frac{x_2}{x_1 - k_0} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{x_2}{x_1 - k_0} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \right| \\ & = \ln |x_1 - k_0| + C. \end{aligned} \quad (10)$$

这是一个  $x_1$  与  $x_2$  关系的曲线簇, 开关函数仅是其中通过  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  原点的一条曲线,  $C$  由原点条件  $x_1=0, x_2=0$  确定. 则由式(10)可求得

$$C = \frac{\alpha_1}{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}} \arctan \left( \frac{\alpha_1 / 2\alpha_2}{\sqrt{1/\alpha_2 - \alpha_1^2 / 4\alpha_2^2}} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha_2} - \ln k_0, \quad (11)$$

因此, 次优化开关函数为

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1}{\sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2}} \arctan \left[ \frac{\frac{1}{2} \sqrt{4\alpha_2 - \alpha_1^2} (x_2 / (x_1 - k_0))}{1 + \frac{\alpha_1}{2} (x_2 / (x_1 - k_0))} \right] \\ & = \ln \left| \frac{x_1 - k_0}{k_0} \right| + \frac{1}{2} \ln \alpha_2 \left| \left( \frac{x_2}{x_1 - k_0} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \frac{x_2}{x_1 - k_0} \right) + \frac{1}{\alpha_2} \right|. \end{aligned} \quad (12)$$

显然,次优化开关函数通过状态空间的原点. 所以一旦系统两个主状态  $X(x_1, x_2)$  落在该开关曲线时,如及时改变控制极性(由  $u=1 \rightarrow u=-1$  或由  $u=-1$  至  $u=1$ ),则系统主状态可抵达  $x(x_1, x_2)=(0,0)$  的位置,此时  $u=0$ ,调节过程结束.

式(2)次优化开关函数具有很高的对象适应性. 例如,  $k_0$  变至  $k_0 + \Delta k_0$ , 当  $x_2=0$  时,同样有  $x_0; \alpha_2$  由  $\alpha_2$  变至  $\alpha_3$  时,同样也有  $(x_1, x_2)=(0,0)$  的关系. 次优化时间控制的问题发生在原对象特性不是二阶,将有一种擦边现象发生. 即  $x$  状态在抵达  $x=(x_1, x_2)=(0,0)$  的近旁,不是渐近或快速趋于  $x=(0,0)$  点,因此调节过程无法实施  $u=0$  的控制,而最终导致发散调节.

### 3 系统的鲁棒性

次优化时间控制是在优化时间开关控制的基础上,加入小偏差的 PID 调节区域. 这个措施防止调节过程的擦边而无法稳定于定态  $x=(0,0)$  的缺点,只是稍微降低了调节过程后期的一些速度. 如图 2 所示的控制对象  $G(s)=1/(s+1)^6$ , 其擦边及双模调节曲线的比较,可以清楚看出时间优化调节与双模(增加 PID 调节区)的差别是从  $F$  点状态开始. (I) 为擦边现象; (I) 曲线形如螺旋线,为双模调节曲线. 时间优化调节从  $F$  点至  $E$  点是向  $x=(0,0)$  位置逼近,但过了  $E$  点后其状态会愈来愈偏离定态点并趋于  $(x_1, x_2)=(\infty, \infty)$ ; 曲线 (I) 则是渐近趋于定态点  $(x_1, x_2)=(0,0)$ . 系统鲁棒性是一个系统稳定性与自适应性的总称<sup>[3]</sup>. 系统稳定性的提高是显而易见的,系统的自适应性在加入 PID 调节区后也是明显增强了. 只有当对象参数  $(k_0, \alpha_1, \alpha_2)$  及阶次变化后,  $x_1$  与  $x_2$  的状态无法进入 PID 调节区,这时系统才会失控. 在时优控制模型基础上加入 PID 调节模型实现的逻辑关系,仅需执行一个条件转移逻辑指令即可实现: if  $e=x_1 < |e_i|$  and  $\dot{e}=x_2 < |\dot{e}_i|$ , then PID else BB. BB 为时优调节模型.

但是这里的 PID 调节模型有别于常规的 PID 调节模型,它是属于积分外反馈的抗积分饱和的模型,如图 3 所示. 这个系统的另一个特性是小偏差范围内控制输出变化十分平滑,从而提高了系统工作的可靠性.

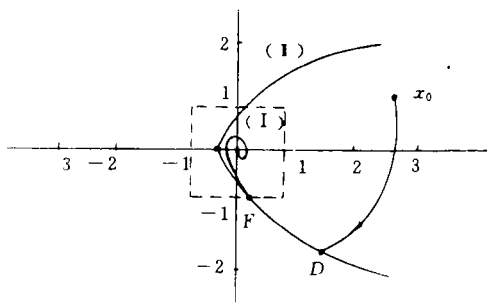


图2 擦边现象与双模调节曲线

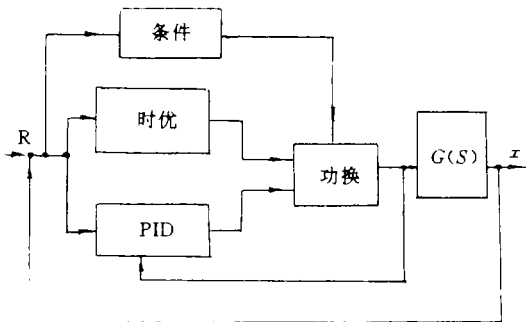


图3 次优控制系统

## 参 考 文 献

- 1 Achermann J. Der entwurf linear regulungssysteme in zustandstraum. Regelungstechnik and Prozessdaten Verarbeitung, 1972, (7): 297~300
- 2 王永初. 自动化系统统计的系统学. 重庆: 重庆出版社, 1989. 410~490
- 3 Friedland B. Control system design. New York: McGraw-Hill, 1986. 233~314

## On the Suboptimal Method for the System of Process Control

### (I) Suboptimal Timing Control

Wang Yongchu

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** Optimal timing control is an important topic in modern process control, while the method of time optimization is also of practical significance in engineering. Thus a demonstration is made on the composition and robustness of time optimization system; and on the suitability of the switching functions of suboptimal timing control. The suboptimal timing control is proved to be of good quality, whether in its stability and self-adaption or in the smoothness of its output.

**Keywords** optimal control, time switchover control, robustness