第16卷　第3期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol.16　No.3
1995年7月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jul. 1995

霍奇星算子、余微分及拉-贝算子与电二阶电磁场方程*

陈强顺①　　王建成②

(① 同济大学物理系,上海 200092; ② 华侨大学电气技术系,泉州 362011)

摘要　探讨应用外微分、霍奇星算子、余微分及拉-贝算子表述电磁理论中的二阶微分方程.

关键词　外微分,霍奇星算子,余微分,拉普拉斯-贝特拉米算子,电磁理论

分类号　O 411.1

当今,现代数学的几何方法已引起数学物理许多领域研讨方法的变革. 事实表明:几何方法优于分析方法的描述效能,几何方法超越分析方法所能得到的描述结果. 它不仅可提供明确而又简洁紧凑的数学方程,而且使数学运算大为简化,省时省力,又易于被人们所理解和接受. 例如,利用微分形式的外积、外导数(外微分)、矢量代数的外积运算、矢量场与微分形式的内积(缩并)以及正、逆 Poincare Lemma 等探讨有关问题,可获得良好的结果[1~8]. 但是,在函数对坐标的二阶微商的表述上,则遇到了困难. 因为对任意次微分形式连求两次外微分,其结果为零,即 $d^2=0$. 为此,需另觅它途. 本文试图引用外微分、霍奇星算子、余微分及拉普拉斯-贝特拉米算子表述电磁理论中的二阶微分方程的问题.

1　外微分、霍奇星算子、余微分及拉-贝算子

1.1　外微分

对于任意可微流形 M, 总存在一个唯一的映射,冠以与微分相同的符号 d, 表如

$$d: F^p(M) \to F^{p+1}(M), \tag{1}$$

意即由 p 次微分形式到 $(p+1)$ 次微分形式的映射,该运算称之为外微分(外导数)[1~4],它使得:

(1) 若 $f\in F^0(M)$, 则 df 就是普通的微分;

(2) $d(\omega+\theta)=d\omega+d\theta$, ω 和 θ 为任意次微分形式;

(3) $d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge d\theta$; $\forall\ \omega\in F^p(M)$, $\theta\in F^q(M)$;

(4) $d\cdot d=d^2=0$.

由式(1) 知,经一次外微分运算,微分形式的次升高一次,此规律可简明表示为如下

* 本文 1995-01-24 收到

$$p\text{ 次形式} \xrightarrow{\mathrm{d}} (p+1)\text{ 次形式} \tag{2}$$

若 U 为流型 M 的某个开子集，则对 p 次形式 $\omega \in F^p(M)$ 的外微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\Big)\\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_p}\mathrm{d}a_{i_1,\cdots,i_p}\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\\ &= \sum\frac{\partial a_{i_1,\cdots,i_p}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}.\end{aligned} \tag{3}$$

1.2 霍奇星算子

其作用在于：做为两个空间 $\overset{p}{\wedge}(M)$ 和 $\overset{n-p}{\wedge}(M)$ 之间的线性变换（n 为空间维数，以下皆同），冠以符号 $*$，表如

$$*: \overset{p}{\wedge}(M) \to \overset{n-p}{\wedge}(M),\ p = 0,1,\cdots,n(n\text{ 维空间}),$$

即从 p 次微分形式到 $(n-p)$ 次微分形式的映射[1~4,9,10]

$$\begin{aligned}*: F^p(M) &\to F^{n-p}(M),\ p = 0,1,\cdots,n,\\ \omega &\mapsto *\omega,\end{aligned} \tag{4}$$

式中 $(*\omega)_x := *(\omega_x)$，$x\in M$，$\omega\in F^p(M)$.

并定义 $(n-p)$ 次微分形式为

$$*\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_{n-p}} *a_{j_1,\cdots,j_{n-p}}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{n-p}},$$

式中 $*a_{j_1,\cdots,j_{n-p}} = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_p}\eta_{i_1,\cdots,i_p,\,j_1,\cdots,j_{n-p}}\,a^{j_1,\cdots,j_p}$.

$*\omega$ 称为 p 次形式 $\omega = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}$ 的伴随形式，或叫做对偶形式．相应的数学运算称为对偶运算，或伴随运算．若连续两次被霍奇星算子作用，则得双对偶形式，或双伴随形式．即对于 p 次形式 $\omega = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}$ 的双对偶运算，可得

$$**\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega, \tag{5}$$

式(4)表明，任一 p 次微分形式被霍奇星算子 $*$ 作用（即作对偶运算）后，成为 $(n-p)$ 次微分形式．由此可见，对于开集 $U\subset R^3$ 中霍奇星算子 $*$，显然有[1~4,9,10]

$*\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$，$*\mathrm{d}y = \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$，$*\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z) = 1$，这些可归纳为

$$*\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^k\Big(\text{循环序}\ \begin{smallmatrix} & i & \\ k & & j\end{smallmatrix}\Big)\text{及}\ *(\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3) = 1, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}*\mathrm{d}(a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3) = {}& \Big(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\Big)\mathrm{d}x^1\\ &+ \Big(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\Big)\mathrm{d}x^2 + \Big(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\Big)\mathrm{d}x^3,\end{aligned} \tag{7}$$

$$*\mathrm{d}*(a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3) = \frac{\partial a_1}{\partial x^1} + \frac{\partial a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial a_3}{\partial x^3}. \tag{8}$$

式(7)意味对一次微分形式求外微分后，再作对偶运算，所得结果为旋度的协变微分形式，它等价于矢量分析中对某矢量函数求旋度的运算，即

$$*\mathrm{d}\Leftrightarrow\mathrm{curl}\ (\text{或}\ \nabla\times), \tag{9}$$

式(8)表明对一次微分形式先作对偶运算后，求外微分，再作一次对偶运算，所得结果为散

度的协变微分形式，它等价于矢量分析中对某矢量函数求散度的运算，即

$$* \mathrm{d} * \Leftrightarrow \mathrm{div}\ (\text{或}\ \nabla\ \cdot), \tag{10}$$

至于梯度的协变微分开式，可对零次微分形式求一次外微分而得，它等价于矢量分析中对某标量函数求梯度的运算[1~5,7~10]，即

$$\mathrm{d} \Leftrightarrow \mathrm{grad}\ (\text{或}\ \Delta). \tag{11}$$

1.3 余微分

利用霍奇星算子 $*$ 和外微分 d，可定义微分形式从 p 次形式到 $(p-1)$ 次形式的运算算子，冠以符号 δ，称为余微分运算算子(或余微分算子). 余微分是一个线性映射，表如

$$\delta:\ F^{p}(M) \to F^{p-1}(M). \tag{12}$$

下式直观又形象地表示余微分 δ 同霍奇星算子 $*$ 及外微分 d 的链式运算(链式线性映射)关系[1~4,9,10]

$$F^{p}(M) \underbrace{\xrightarrow{*} F^{n-p}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} F^{n-p+1}(M) \xrightarrow{*}}_{(-1)^{n(p+1)+1}\delta} F^{p-1}(M).$$

对于 $f \in F^{\circ}(M)$，有

$$\delta f = 0, \tag{13}$$

对于 $\omega \in F^{p}(M)$，有

$$\delta\omega = (-1)^{n(p+1)+1} * \mathrm{d} * \omega,\ 1 \leqslant p \leqslant n. \tag{14}$$

可见，对 p 次微分形式作余微分 δ 的运算，其结果等价于对该微分形式先作霍奇星算子 $*$ 的运算，接着求一次外微分 d，最后又作霍奇星算子 $*$ 的运算的三链式运算所得的总结果，即

$$\delta :\ = * \mathrm{d} *. \tag{15}$$

1.4 拉普拉斯-贝特拉米算子

借助霍奇星算子 $*$ 和外微分 d，又可定义微分形式从 p 次形式到 p 次形式的运算算子，冠以符号 Δ，称为拉普拉斯-贝特拉米算子(简称拉-贝算子，亦称为广义拉普拉斯算子). 作拉-贝子 Δ 的运算是一种由 p 次微分形式到 p 次形式的线性映射[1~4,9,10]. 表如

$$\Delta :\ = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} : F^{p}(M) \to F^{p}(M),\ 0 \leqslant p \leqslant n. \tag{16}$$

可见，对任意微分形式作拉-贝算子 Δ 的运算，其结果等价于对该微分形式先作余微分 δ 的运算，再求外微分 d 的运算，并把此两运算顺序相倒后同前运算求和所得的总结果. 若 p 次形式记为 ω，则有

$$\Delta\omega = (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\omega. \tag{17}$$

在特殊情况下：$f \in F^{\circ}(M)$，$p=0$ 次微分形式，由式(13)有 $\delta f=0$，由此可得 $\mathrm{d}\delta f=0$，从而求得

$$\Delta f = \delta \mathrm{d} f,\ \text{即}\ \Delta = \delta\mathrm{d} = * \mathrm{d} * \mathrm{d}. \tag{18}$$

其实，作用在零次微分形式上的拉-贝算子 $\Delta : F^{\circ}(R^{n}) \to F^{\circ}(R^{n})$，正是通常的拉普拉斯算子

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^{i})^{2}}. \tag{19}$$

2　对电磁理论中二阶微分方程的表述

2.1　在三维欧氏空间

在静电场中，宜用零次形式表示标量场电势 $\dot{\varphi}=\varphi(x^1,x^2,x^3)$；用一次形式 $\overset{1}{\varepsilon}=\sum_i E_i\mathrm{d}x^i=E_1\mathrm{d}x^1+E_2\mathrm{d}x^2+E_3\mathrm{d}x^3$ 表示矢量场电场强度 $\mathbf{E}(E_1,E_2,E_3)$，借助式(9)～(11)，可得静电场相应方程的外微分形式

$$\nabla x\boldsymbol{E}=0\Leftrightarrow *\mathrm{d}\overset{1}{\varepsilon}=0, \tag{a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\Leftrightarrow *\mathrm{d}*(\varepsilon_0\overset{1}{\varepsilon})=\rho(\varepsilon_0 \text{ 为介电常数}), \tag{b}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi\Leftrightarrow\overset{1}{\varepsilon}=-\mathrm{d}\dot{\varphi}, \tag{c}$$

将式(c)代入式(b)，可得静电势泊松方程的等价外微分形式

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Leftrightarrow *\mathrm{d}*(\mathrm{d}\dot{\varphi}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ (\text{或 }\delta\mathrm{d}\dot{\varphi}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \text{或 }\Delta\dot{\varphi}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}). \tag{20}$$

在无场源空间的特殊情况下，$\rho=0$，则得静电势拉普拉斯方程的等价外微分形式

$$\nabla^2\varphi=\Leftrightarrow *\mathrm{d}*(\mathrm{d}\dot{\varphi}=0\ (\text{或 }\delta\mathrm{d}\dot{\varphi}=0,\ \text{或 }\Delta\dot{\varphi}=0), \tag{21}$$

静磁场中，可用一次形式 $\overset{1}{\beta}=\sum_i B_i\mathrm{d}x^i=B_1\mathrm{d}x^1+B_2\mathrm{d}x^2+B_3\mathrm{d}x^3$ 表示矢量场磁感应强度 $\boldsymbol{B}(B_1,B_2,B_3)$；用一次形式 $\overset{1}{\alpha}=\sum_i A_i\mathrm{d}x^i=A_1\mathrm{d}x^1+A_2\mathrm{d}x^2+A_3\mathrm{d}x^3$ 表示矢量场矢势 $\boldsymbol{A}(A_1,A_2,A_3)$；用一次形式 $\overset{1}{\xi}=\sum_i J_i\mathrm{d}x^i=J_1\mathrm{d}x^1+J_2\mathrm{d}x^2+J_3\mathrm{d}x^3$ 表示电流密度矢量 $\boldsymbol{J}(J_1,J_2,J_3)$，相应地可得静磁场方程的外微分形式

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\overset{1}{\beta}=*\mathrm{d}\overset{1}{\alpha}, \tag{d}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\Leftrightarrow\mathrm{d}\overset{1}{\beta}=\mu_0\overset{1}{\xi}, \tag{e}$$

考虑到辅助条件：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0\Leftrightarrow *\mathrm{d}*\overset{1}{\alpha}=0$，将(d)代入(e)得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}\Leftrightarrow *\mathrm{d}*(\mathrm{d}\overset{1}{\alpha})=-\mu_0\overset{1}{\xi}(\text{或 }\delta\mathrm{d}\overset{1}{\alpha}=-\mu_0\overset{1}{\xi}), \tag{22}$$

对于迅变电磁场，电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\Leftrightarrow\overset{1}{\varepsilon}=-\mathrm{d}\dot{\varphi}-\frac{\partial\overset{1}{\alpha}}{\partial t}, \tag{f}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\overset{1}{\beta}=*\mathrm{d}\overset{1}{\alpha}. \tag{g}$$

其标势 φ 和矢势 $\boldsymbol{A}$ 的达朗伯方程的外微分形式分别为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Leftrightarrow\nabla\dot{\varphi}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\dot{\varphi}}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},\\&\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{J}\Leftrightarrow\delta\mathrm{d}\overset{1}{\alpha}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overset{1}{\alpha}}{\partial t^2}=-\mu_0\overset{1}{\xi}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

相应的规范变换条件——洛伦兹条件为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\Leftrightarrow *\mathrm{d}*\overset{1}{\alpha}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial t}=0, \tag{24}$$

平面电磁波波动方程的外微分形式为

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\Leftrightarrow\delta\mathrm{d}\overset{1}{\varepsilon}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overset{1}{\varepsilon}}{\partial t^2}=0,\\ \nabla^2\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0\Leftrightarrow\delta\mathrm{d}\overset{1}{\beta}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overset{1}{\beta}}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

2.2 在 Minkowski 四维时空

如所周如,Minkowski 四维时空坐标系中,对应的四维空间矢量 $\boldsymbol{X}_\mu$ 和电流密度四维矢量 $\boldsymbol{J}_\mu$ 分别为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_\mu=(\mathrm{i}ct,\ \boldsymbol{X})=(\mathrm{i}ct,\ X_1,X_2,X_3)\\&\boldsymbol{J}_\mu(\mathrm{i}cp,\ \boldsymbol{J})=(\mathrm{i}cp,\ J_1,\ J_2,\ J_3)\end{aligned}\qquad(\mu=0,1,2,3),$$

引用微分算符$\Box=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial X_\mu}\frac{\partial}{\partial X_\mu}$(洛伦兹标量算符),则势的达朗伯方程(23)可缩写为

$$\left.\begin{aligned}\Box\varphi&=-\mu_0c^2p,\\ \Box\boldsymbol{A}&=-\mu_0\boldsymbol{J}.\end{aligned}\right\}\tag{h}$$

若又引进四维势矢量为

$$\boldsymbol{A}_\mu=(\frac{i}{c}\varphi,\ \boldsymbol{A})=(\frac{i}{c}\varphi,\ A_1,A_2,\ A_3),$$

则式(h)可合写为四维势矢量方程的协变形式如下

$$\Box\boldsymbol{A}_\mu=-\mu_0\boldsymbol{J}_\mu\quad(\mu=0,1,2,3),$$

而洛伦兹规范变换条件的四维协变形式为

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}_\mu}{\partial\boldsymbol{X}_\mu}=0\quad(\mu=0,1,2,3).$$

现引进如下一次形式表达四维势矢量

$$\overset{1}{\Lambda}=\sum_{\mu=0}^{3}\boldsymbol{A}_\mu d\boldsymbol{X}^\mu=A_0\mathrm{d}x^0+A_1\mathrm{d}x^1+A_2\mathrm{d}x^2+A_3\mathrm{d}x^3\quad(A_0=\frac{i}{c}\varphi),$$

据此,洛伦兹规范变换条件写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}_\mu}{\partial\boldsymbol{X}_\mu}=0\Leftrightarrow *\mathrm{d}*\overset{1}{\Lambda}=0\quad(\text{或}\ \delta\overset{1}{\Lambda}=0).\tag{26}$$

鉴于式(26)外微分形式,立即可得 $\mathrm{d}\delta\overset{1}{\Lambda}=0$,于是将拉-贝算子 Δ 作用于一次形式 $\overset{1}{\Lambda}$,便可求得

$$\Delta\overset{1}{\Lambda}=(\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\overset{1}{\Lambda}=\mathrm{d}\delta\overset{1}{\Lambda}+\delta\mathrm{d}\overset{1}{\Lambda}=\delta\mathrm{d}\overset{1}{\Lambda},$$

又考虑到$\Box\boldsymbol{A}_\mu$ 等价于 $\Delta\overset{1}{\Lambda}$(或 $\delta\mathrm{d}\overset{1}{\Lambda}$),于是四维势矢量方程的协变开式对应的外微分形式为

$$\Box\boldsymbol{A}_\mu=-\mu_0\boldsymbol{J}_\mu\Leftrightarrow\Delta\overset{1}{\Lambda}=-\mu_0\boldsymbol{J}_\mu(\mu=0,1,2,3)\ (\text{或}\ \delta\mathrm{d}\overset{1}{\Lambda}=-\mu_0\boldsymbol{J}_\mu).\tag{27}$$

参 考 文 献

1 Von W C. Differential forms in mathematical physics. Amsterdam: North Holland, 1981. 141~207

2 Curtis W D, Miller F R. Differential manifolds and theoretical physiscs. New York: Academic Press, INc., 1985. 141~212

3 Edelen D G B. Applied exterior calculus. New York: John wiley & Sons, INc., 1985. 77～393

4 Schutz B F. Geometrical methods of mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. 113～200

5 陈强顺. 麦克斯韦电磁场方程组的外微分形式. 物理，1998，17(8)：468～473

6 陈强顺. 微分形式与外微分在电磁场中的应用. 杨州师院学报(自然科学版)，1990，10(3)：54～63

7 陈强顺. 电荷守恒定律可确定麦克斯韦方程组的数学形式. 同济大学学报，1989，17(3)：395～400

8 陈强顺，王建成. 微分形式与外微分应用于电动力学的探讨. 华侨大学学报(自然科学版)，1992，13(4)：468～475

9 Schleifer N. Differential forms as a basis for vector analysis with applications to electrodynamics. Am. J. phys. 1983, 51(12): 1 139～1 145

10 Helgason S. Differential geometry, lei groups and synmetric spaces. New York: Academic Press, INc., 1978. 1～196

11 Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. Manifolds, tensor analysis and applications. London: Addiso-Wesley Publishing Company, INc., 1983. 323～511

Hodge Star Operator, Codifferential, Laplace-Beltrami Operator and Second Order Differential Equation in Electromagnetic Field

Chen Qiangshun[①]　　Wang Jiancheng[②]

(① Physics, Tongji Univ., 200092, Shanghai; ② Dept. of Electric Technique, Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract An inquiry is made on the expression of second-order differential equation in electromagnetic theory by applying exterior differential, Hodge star operator, codifferential, and Laplace-Beltrami operator.

Keywords exterior differential, Hodge star operator, codifferential, Laplace-Beltrami operator, electromagnetic theory