

# 解线性方程组的 SGAOR 方法及其应用\*

曾文平

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

**摘要** 推广 GAOR 方法的理论并提出解线性方程组的 SGAOR 方法. 这是一个类似于分别从 AOR(或 SOR)方法导出 SAOR(或 SSOR)的方法. 理论与计算结果表明该方法是相当有效的.

**关键词** 线性方程组, 对称的 GAOR 方法, 收敛性

**分类号** O 241.6

解大线性方程组

$$Ax = b, A \in C^{n \times n}, \det A \neq 0, \text{ 且 } x, b \in C^n \quad (1)$$

的 SOR 方法已在工程科技领域获得广泛应用. 文献[1]中为加速收敛而建立了对称的 SOR (SSOR)方法. 1978 年, 文献[2]提出 AOR 方法, Hadjidimos 引入两个参数以加速迭代. 与 SSOR 方法相似, 随后他又建立了对称的 AOR(SAOR)方法<sup>[3]</sup>. 1986 年, Hadjidimos 等人<sup>[4]</sup>又进一步研究了推广的 AOR 迭代法(简称 GAOR 方法)的收敛性. 数值例子表明, 由于具有两个迭代参数  $w, r$  及两个对角矩阵  $D_1, D_2$  待选, GAOR 方法确实可以加快 AOR 迭代的收敛速度因而是一种值得重视和研究的迭代法. 目的在于导出 SGAOR (Symmetric Generalized Accelerated Overrelaxation Method)方法, 并讨论其收敛性. 给出当系数矩阵  $A$  正定对称时, 收敛的充要条件, 并估计 SGAOR 迭代的谱半径. 理论与计算结果表明本文所提的方法是有效的.

为以后讨论方便起见, 先介绍解方程组(1)的 GAOR 迭代法. 设方程组(1)的系数矩阵

$$A = D_A - C_L - C_V, \quad (2)$$

其中

$$D_A = \text{diag}(A) = D_1 - D_2 - D_3, \det D_1 \neq 0, \quad (3)$$

$-D_L$  和  $-C_V$  分别为  $A$  的严格下、上三角阵, 则解方程组(1)的 GAOR 迭代法为

$$x^{(m+1)} = L_{w,r} x^{(m)} + w[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}b \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

其中  $L_{w,r}$  为 GAOR 迭代矩阵, 其表达式为

$$\begin{aligned} L_{w,r} &\equiv L_{w,r}(D_1, D_2) \\ &= [D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}[(1-w)D_1 + (w-r)(D_2 + C_L) + (D_3 + C_V)] \\ &= I - w(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A = (I - rL)^{-1}[(I - wD) + (w-r)L + w\bar{V}], \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $w, r \in \mathbb{R}$  分别为松弛参数和加速参数, 且  $w \neq 0, \det(D_1 - rD_2) = \det \bar{D} \neq 0$ .

\* 本文 1994-11-15 收到; 福建省自然科学基金资助项目

$$\tilde{D} = D_1 - rD_2, D = \tilde{D}^{-1}D_A, L = \tilde{D}^{-1}C_L, \bar{V} = \tilde{D}^{-1}C_V, \quad (6)$$

当参数偶 $(w, r)$ 取不全值及对角阵 $D_1, D_2$ 取不全形式时, 可得到各种不全的迭代法<sup>[4]</sup>.

## 1 SGAOR 方法

对称的推广的 AOR 方法(或 SGAOR 方法)可以看作由两个半迭代所组成. 其第一个半迭代即是 GAOR 方法本身; 而第二个半迭代则是 $C_L$ 和 $C_V$ 互相交换的 GAOR 方法. 于是, 我们利用通常的(Forward)GAOR 方法由 $x_k$ 决定 $x_{k+\frac{1}{2}}$ , 即

$$x_{k+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_{w,r}(D_1, D_2)x_k + w[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}b, \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{w,r}(D_1, D_2) &\equiv \mathcal{F}_{w,r} \\ &= [D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}[(1-w)D_1 + (w-r)(D_2 + L) + w(D_3 + C_V)] \\ &= I - w(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A = (I - rL)^{-1}[(I - wD) + (w-r)L + w\bar{V}]. \end{aligned} \quad (8)$$

再由(Backward) GAOR 方法从 $x_{k+\frac{1}{2}}$ 决定 $x_{k+1}$ 得

$$x_{k+1} = U_{w,r}(D_1, D_2)x_{k+\frac{1}{2}} + w[D_1 - r(D_2 + C_V)]^{-1}b, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} U_{w,r}(D_1, D_2) &\equiv U_{w,r} \\ &= [D_1 - r(D_2 + C_V)]^{-1}[(1-w)D_1 + (w-r)(D_2 + C_V) + w(D_3 + C_L)] \\ &= I - w(D_1 - rD_2 - rC_V)^{-1}A = (I - r\bar{V})^{-1}[(I - wD) + (w-r)\bar{V} + wL]. \end{aligned} \quad (10)$$

从(7)和(9)消去 $x_{k+\frac{1}{2}}$ 得 SGAOR 迭代

$$x_{k+1} = \Psi_{w,r}(D_1, D_2)x_k + C, \quad (11)$$

其中 $\Psi_{w,r}$ 为 SGAOR 迭代矩阵, 其表达式为

$$\begin{aligned} \Psi_{w,r}(D_1, D_2) &\equiv \Psi_{w,r} = U_{w,r}(D_1, D_2)\mathcal{F}_{w,r}(D_1, D_2) \\ &= I - [D_1 - r(D_2 + C_V)]^{-1}M(w, r)[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}A, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$M(w, r) \equiv M_{w,r}(D_1, D_2) = w[2D_1 - 2rD_2 - rD_A + (r-w)A], \quad (13)$$

而

$$C = [I - \Psi_{w,r}(D_1, D_2)]A^{-1}b. \quad (14)$$

由(12)可得

$$I - \Psi_{w,r} = [D_1 - r(D_2 + C_V)]^{-1}M(w, r)[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}A.$$

因此, 当 $A$ 及 $M(w, r)$ 非奇异, 且 $\det(D_1 - rD_2) \neq 0$ ,  $I - \Psi_{w,r}$ 是非奇异的. 进而由(14)式, 根据文[1]定理3中式2.2及式2.4推出 SGAOR 方法与方程组(1)是完全相容的.

## 2 收敛性分析

引理1 设 $A$ 正定实对称, 如果 $M(w, r)$ 正定, 则 $\det(D_1 - rD_2) \neq 0$ .

证 假定 $w > 0$ . 因 $M(w, r)$ 正定, 则

$$\frac{M(w, r)}{w} = 2D_1 - 2rD_2 - rD_A + (r-w)A.$$

也是正定的. 因此, 对任意  $x \neq 0$  有

$$\begin{aligned} 0 &< x^T [2D_1 - 2rD_2 - rD_A + (r - w)A]x \\ &= x^T [2D_1 - 2rD_2 - r(C_L + C_V)]x - wx^T Ax \\ &< x^T [2D_1 - 2rD_2 - r(C_L + C_L^T)]x = 2x^T [D_1 - rD_2 - rC_L]x. \end{aligned}$$

它意味着  $\det(D_1 - rD_2 - rC_L) = \det(D_1 - rD_2 - rC_V) \neq 0$ , 注意到  $-C_L(-C_V)$  为  $A$  的严格下(上)三角阵, 于是便有  $\det(D_1 - rD_2) \neq 0$ . 同理可证,  $w < 0$  也成立. 引理 1 证毕.

**引理 2** 如果  $\det(D_1 - rD_2) \neq 0$  且  $A$  实对称正定, 则对任意实数偶  $(w, r)$ , 相应的 SGAOR 迭代矩阵  $\Psi_{w,r}$  的特征值是实的、非负的, 且

$$(\mathcal{F}'_{w,r})^T = U'_{w,r}, \quad (15)$$

及

$$\|\mathcal{F}_{w,r}\|_{A^{1/2}}^2 = \rho(U_{(w,r)}), (\mathcal{F}_{w,r}) = \rho(\Psi_{w,r}) = \|\Psi_{w,r}\|_{A^{1/2}}, \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{w,r} &= A^{1/2} \mathcal{F}_{w,r} A^{-1/2}, U'_{w,r} = A^{1/2} U_{w,r} A^{-1/2}, \\ \Psi'_{w,r} &= A^{1/2} \Psi_{w,r} A^{-1/2}, \Psi_{w,r} = U_{w,r} \mathcal{F}_{w,r}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{w,r}\|_{A^{1/2}} &= A^{1/2} \mathcal{F}_{w,r} A^{-1/2}, \|\Psi_{w,r}\|_{A^{1/2}} \\ &= A^{1/2} \Psi_{w,r} A^{-1/2}, \end{aligned}$$

$\|\Psi_{w,r}\|_{A^{1/2}}$  是矩阵  $A^{1/2}$  的 2-范数,  $\rho(B)$  表示矩阵  $B$  的谱半径.

**证** 因  $A$  为实对称正定矩阵, 故存在一对称正定矩阵  $A^{1/2}$ , 使  $A = A^{1/2} A^{1/2}$ , 再由 (8) 及 (10) 可知

$$\mathcal{F}'_{w,r}{}^T = [I - wA^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A^{1/2}]^T = U'_{w,r},$$

又

$$\begin{aligned} \Psi'_{w,r} &= A^{1/2} \Psi_{w,r} A^{-1/2} = A^{1/2} U_{w,r} \mathcal{F}_{w,r} A^{-1/2} \\ &= A^{1/2} U_{w,r} A^{-1/2} A^{1/2} \mathcal{F}_{w,r} A^{-1/2} = U'_{w,r} \mathcal{F}'_{w,r} = (\mathcal{F}'_{w,r})^T \mathcal{F}'_{w,r}. \end{aligned}$$

因此,  $\Psi'_{w,r}$  非负定,  $\Psi'_{w,r}$  及其相似矩阵  $\Psi_{w,r}$  的特征值是实的非负的. 由文 [2] 定理 2 中的 1.11 式推出

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_{w,r}\|_{A^{1/2}}^2 &= (A^{1/2} \mathcal{F}_{w,r} A^{-1/2})^2 = (\mathcal{F}'_{w,r})^2 \\ &= \rho(\mathcal{F}'_{w,r} (\mathcal{F}'_{w,r})^T) = \rho(\mathcal{F}'_{w,r} U'_{w,r}) = \rho(U'_{w,r} \mathcal{F}'_{w,r}) = \rho(\Psi'_{w,r}) = \rho(\Psi_{w,r}). \end{aligned}$$

引理 2 证毕.

**引理 3**<sup>[5]</sup>  $A^T A$  对称且非负定, 如果  $A$  满秩, 则  $A^T A$  正定.

**定理 1** 设方程组 (1) 中的系数矩阵  $A$  正定对称, 则相应的 SGAOR 迭代矩阵有实的非负的特征值, 且 SGAOR 方法收敛, 即

$$\rho(\Psi_{w,r}) = \|\Psi_{w,r}\|_{A^{1/2}} = \|\mathcal{F}_{w,r}\|_{A^{1/2}}^2 < 1,$$

当且仅当  $M(w, r)$  正定. 反之, 若  $\|\Psi_{w,r}\|_{A^{1/2}} < 1$ , 则  $M(w, r)$  正定.

**证** 由 (17) 知

$$\begin{aligned} \Psi'_{w,r} &= U'_{w,r} \mathcal{F}'_{w,r} \\ &= I - A^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_V)^{-1}M(w, r)(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A^{1/2}, \end{aligned} \quad (18)$$

由引理2知其特征值是实的非负的. 又因  $M=M(w,r)$  正定, 所以

$$I - \Psi'_{w,r} = A^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_V)^{-1}M^{1/2}M^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A^{1/2} \\ = [M^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A^{1/2}]^T [M^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A^{1/2}], \quad (19)$$

由引理1知,  $\det[M^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A^{1/2}] = \det M^{1/2} \det(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1} \cdot \det A^{1/2} \neq 0$ , 故  $M^{1/2}(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1}A^{1/2}$  是非奇异的. 由(18)及引理3知,  $I - \Psi'_{w,r}$  是实对称正定的. 因之,  $\Psi'_{w,r}$  的特征值小于1. 从而其相似矩阵  $\Psi_{w,r}$  的特征值也小于1. 于是证明了  $\Psi_{w,r}$  的特征值是实的非负的且小于1. 这意味着  $\rho(\Psi_{w,r}) < 1$ , 即 SGAOR 方法收敛.

反之如果  $\rho(\Psi_{w,r}) < 1$ , 则矩阵

$$I - \Psi_{w,r} = [(D_1 - r(D_2 + rC_V))^{-1}M(w,r)[(D_1 - r(D_2 + rC_L^{-1}))]A. \quad (20)$$

特征值为正的且小于1. 而矩阵  $[D_1 - r(D_2 + rC_L^T)](I - \Psi_{w,r})[(D_1 - r(D_2 + rC_L^T))^{-1}]$  相似于(20)左边且因此与矩阵  $I - \Psi_{w,r}$  有相应特征值. 考虑到(20), 则

$$E = [D_1 - r(D_2 + rC_L^T)](I - \Psi_{w,r})[D_1 - r(D_2 + rC_L^T)]^{-1} \\ = M[D_1 - r(D_2 + rC_L^T)]^{-1}A[D_1 - r(D_2 + rC_L^T)]^{-1} \\ = M\{[D_1 - r(D_2 + rC_L)]^{-1}A^{1/2}\}\{[D_1 - r(D_2 + rC_L)]^{-1}A^{1/2}\}^T \\ = MF. \quad (21)$$

其中矩阵  $F = \{[D_1 - (D_2 + rC_L)]^{-1}A^{1/2}\}\{[D_1 - r(D_2 + rC_L)]^{-1}A^{1/2}\}^T$  为实对称正定矩阵. 因  $\det\{[D_1 - (D_2 + rC_L)]A^{1/2}\} = \det(D_1 - rD_2 - rC_L)\det A^{1/2} \neq 0$ , 由(21)知,  $E$  有正特征值, 故  $MF$  有正特征值. 因  $M$  及  $F$  均是实对称矩阵且  $F$  正定, 从而由引理2知  $M$  也是正定的. 定理1证毕.

当矩阵  $\tilde{B} = \tilde{D}^{-1}(C_L + C_V) = L + \bar{V}$  的特征值  $\mu_i$  为实数时, 记  $\underline{\mu} = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i$ ,  $\bar{\mu} = \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i$ , 其中  $\tilde{D} = D_1 - rD_2$ . 又记对角矩阵  $D = \tilde{D}^{-1}D_A$  的特征值为  $d_i$ , 且记  $\underline{d} = \min_{1 \leq i \leq n} d_i$ ,  $\bar{d} = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ , 定义集合  $J(w, r)$ , 其中  $(w, r) \in J(w, r)$  满足下列条件: (A)  $0 < w < 2/\bar{d}$ ; 及 (B)  $r$  满足下述条件:

(i) 当  $\underline{\mu} < \bar{\mu} \leq 0$  时,  $r > w + (2 - w\underline{d})/\underline{\mu}$ ;

(ii) 当  $\bar{\mu} > \underline{\mu} \geq 0$  时,  $r < w + (2 - w\bar{d})/\bar{\mu}$ ;

(iii) 当  $\underline{\mu} = \bar{\mu} = 0$  时,  $r$  任意;

(iv) 当  $\underline{\mu} < 0 < \bar{\mu}$  时,  $w + (2 - w\underline{d})/\underline{\mu} < r < w + (2 - w\bar{d})/\bar{\mu}$ .

于是, 由定理1易得.

**推论1** 设方程组(1)中的系数矩阵  $A$  实对称正定, 如果  $\tilde{D} = D_1 - rD_2 > 0$ , 则 SGAOR 方法收敛, 当且仅当  $(w, r) \in J(w, r)$ .

**证** 因  $\tilde{D} = D_1 - rD_2 > 0$ , 则存在  $\tilde{D}^{1/2}$  使  $\tilde{D}^{1/2}\tilde{D}^{1/2} = \tilde{D}$ , 于是

$$M(w, r) = w[2D_1 - 2rD_2 - rD_A + (r - w)A] \\ = w[2\tilde{D} - (r - w)(C_L + C_V) - wD_A] \\ = w\{\tilde{D}^{1/2}[2I - (r - w)\tilde{D}^{1/2}B\tilde{D}^{-1/2} - w\tilde{D}^{1/2}D\tilde{D}^{-1/2}]\tilde{D}^{1/2}\},$$

故矩阵  $M(w, r)$  正定当且仅当矩阵  $w\{2I - (r - w)B - wD\}$  的特征值  $\lambda_i = w\{2 - (r - w)\mu_i - wd_i\} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 不难验证, 当且仅当  $(w, r) \in J(w, r)$  时上式成立, 由定理1可得本推论.

由定理 1, 仿文[4]易得.

**推论 2** 若  $A$  实对称正定, 则 SGAOR 方法收敛, 如果下列条件之一成立.

- (i)  $0 < w \leq r$ , 且  $d_{1j} > r(d_{2j} + a_{jj}/2)$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ .
- (ia)  $0 < w \leq r$ ,  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > -D_A/2$  且  $r \in (0, \min_j \epsilon_j)$ .
- (ib)  $0 < w \leq r$ ,  $D_1 < 0$ ,  $D_2 < -D_A/2$  且  $r \in (0, \max_j \epsilon_j, +\infty)$ .
- (ic)  $0 < w \leq r$ ,  $D_1 > 0$ , 且  $D_2 < -D_A/2$ .
- (ii)  $r \leq w < 0$  且  $d_{1j} < r(d_{2j} + a_{jj}/2)$ ,  $j=1, 2, \dots, n$ .
- (iia)  $r \leq w < 0$ ,  $D_1 > 0$ ,  $D_2 < -D_A/2$  且  $r \in (-\infty, \min_j \epsilon_j)$ .
- (iib)  $r \leq w < 0$ ,  $D_1 < 0$ ,  $D_2 > -D_A/2$  且  $r \in (\min_j \epsilon_j, 0)$ .
- (iic)  $r \leq w < 0$ ,  $D_1 < 0$  且  $D_2 < -D_A/2$ .

其中  $\epsilon_j = 2d_{1j}/(2d_{2j} + a_{jj})$  及  $d_{1j}, d_{2j}, a_{jj}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 分别为  $D_1, D_2, D_A$  的对角元素.

**推论 3** 如果  $A$  是实对称矩阵且  $D_A > 0$ , 又  $D_1 = kD_A$  ( $k > 0$ ),  $D_2 = 0, D_3 \geq 0$ . 如果  $0 < w < 2k$  且  $w + (2k - w)/\mu'_{\min} < r < w + (2k - w)/\mu'_{\max}$  (其中  $\mu'_{\min}, \mu'_{\max}$  分别为 GJ 方法迭代矩阵  $B' = L' + \bar{V}' = D_A^{-1}(C_L + C_V)$  的最小与最大特征值), 则 SGAOR 方法收敛且仅当  $A$  是正定矩阵.

**定理 2** 如果方程组(1)的系数矩阵  $A$  为实对称矩阵, 且  $M(w, r)$  正定,  $D_1 - rD_2 > 0$ , 则相应的 SGAOR 迭代矩阵有实特征值  $\lambda$ . 进而, 如果  $\rho(\Psi_{w,r}) < 1$ , 则  $A$  正定.

**证** 因  $M(w, r)$  正定, 故  $\Psi_{w,r}$  相似于

$$\begin{aligned}\Psi_{w,r}^* &= I - M^{-1/2}[D_1 - r(D_2 + C_L^T)][D_1 - r(D_2 + C_L^T)]^{-1}M \\ &\quad \times [D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}A[D_1 - r(D_2 + C_L^T)]^{-1}M^{1/2} \\ &= I - M^{1/2}[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}A[D_1 - r(D_2 + C_L^T)]^{-1}M^{1/2} \\ &= I - \{M^{1/2}[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}\}A\{M^{1/2}[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}\}^T.\end{aligned}$$

它是对称矩阵, 故  $\Psi_{w,r}$  有实特征值  $\lambda$ , 因  $C = \{M^{1/2}[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}\}^T \{M^{1/2}[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}\}$  且  $\det \{M^{1/2}[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}\} = \det M^{1/2} \det [D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1} > 0$ . 由(20)式得  $I - \Psi_{w,r} = CA$ . 如果  $\rho(\Psi_{w,r}) < 1$ , 则  $1 - \lambda_j > 0$  且矩阵  $CA$  的特征值为正. 由文[3]引理 2, 意味着  $A$  也正定.

### 3 谱半径的估计

现在估计 SGAOR 方法的谱半径  $\rho(\Psi_{w,r})$ . 如果系数矩阵  $A$  正定, 令  $R^{-1}(w, A) = A^{1/2}(\tilde{D} - rC_V)^{-1}M(w, r)(\tilde{D} - rC_L)^{-1}A^{1/2}$ , 则由定理 1 的证明知  $R(w, A) = A^{-1/2}(\tilde{D} - rC_L)[M(w, r)]^{-1}(\tilde{D} - rC_V)A^{-1/2}$  的特征值位于  $[1, +\infty)$ . 因此,  $H(w, r) = A^{-1}(\tilde{D} - rC_L)[M(w, r)]^{-1}(\tilde{D} - rC_V)$  的特征值位于同一区间  $[1, +\infty)$ . 令  $\lambda(w, r) = \rho(H(w, r)) = \rho(R(w, r))$ , 则存在向量  $y$  使得  $H(w, r)y = \lambda(w, r)y$  或  $(\tilde{D} - rC_L)[M(w, r)]^{-1}(\tilde{D} - rC_V)y = \lambda Ay$ , 于是

$$\begin{aligned}\lambda(w, r) &= \frac{y^T(\tilde{D} - rC_L) \frac{1}{w}[2\tilde{D} - (r - w)(C_L + C_V) - wD_A]^{-1}(\tilde{D} - rC_V)y}{y^T Ay} \\ &= y^T(\tilde{D} - rC_L)\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{w}[2I - (r - w)\tilde{D}^{-\frac{1}{2}}(C_L + C_V)\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} - w\tilde{D}^{-\frac{1}{2}}D_A\tilde{D}^{-\frac{1}{2}}]^{-1}\end{aligned}$$

$$\times \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}(\tilde{D} - rC_V)y \cdot (y^T A y)^{-1}. \quad (22)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} y' &= \tilde{D}^{\frac{1}{2}}y, \text{ 则 } (y')^T = y^T \tilde{D}^{\frac{1}{2}}, \\ B' &= \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}(C_L + C_V)\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} = \tilde{D}^{\frac{1}{2}}B\tilde{D}^{-\frac{1}{2}}, \\ D' &= \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}D_A\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} = \tilde{D}^{\frac{1}{2}}D\tilde{D}^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

矩阵  $w[2I - (r-w)D' - wD']$  的最小特征值  $\lambda_{\min}$  也是  $M(w, r)$  的最小特征值. 从式(22)得

$$\begin{aligned} \lambda(w, r) &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \cdot \frac{y'^T - y' - ry'^T B' y' + r^2 y'^T (\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} C_L \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} C_V \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}) y'}{y'^T D' y' - y'^T B' y'} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}} \cdot \frac{1 - r\eta + r^2\beta}{\xi - \eta}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{y'^T B' y'}{y'^T y'} \\ &\leq \rho(B') = \rho(B) \\ \beta &= \frac{y'^T (\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} C_L \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} C_V \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}) y'}{y'^T y'} \\ &\leq \rho(\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} C_L \tilde{D}^{-\frac{1}{2}} C_V \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \rho(\tilde{D}^{-\frac{1}{2}} \tilde{D}^{-1} C_L \tilde{D}^{-1} C_V \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \rho(\tilde{D}^{\frac{1}{2}} L V \tilde{D}^{-\frac{1}{2}}) = \rho(LV), \\ \zeta &= \frac{y'^T D' y'}{y'^T y'} \leq \rho(D') = \rho(D). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

于是, 我们有如下的定理.

**定理 2** 如果矩阵  $A$  正定, 则

$$\rho(\psi_{w,r}) = \|\psi_{w,r}\| A^{1/2} \leq 1 - \frac{\lambda_{\min}(\xi - \eta)}{1 - r\eta + r^2\beta}, \quad (26)$$

其中  $\eta, \beta, \zeta$  由(25)所确定,  $\lambda_{\min}$  为矩阵  $M(w, r)$  的最小特征值.

## 4 数值例子与结论分析

**例<sup>[3]</sup>** 考虑如附图的多角形域  $ABCDEF$  的 Laplace 方程混合边值问题

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (27)$$

$$T = \begin{cases} T_H, & \text{在 } AB \text{ 边上,} \\ T_L, & \text{在 } CDEF \text{ 边上,} \end{cases} \quad (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \text{在 } BC \text{ 及 } FA \text{ 边上,} \quad (29)$$

如附图, 采用正方形网格并利用文[6]所给出的差分格式, 计算如附图所示的十个网格点上的  $T$  值, 得到方程组(1)的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & & & & & \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & \\ & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & \\ & & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & & 0 & 0 & -1 & 3 & \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (30)$$

是不可约对角占优、实对称且对角元为正实数. 从而, 由文〔7〕定理 1.8 知, 它是正定矩阵. 由定理 1 知, 此时 SGAOR 方法收敛, 因此, 定理 1 及其推论均适用于此例.

我们分别按下述两种方案搜索求 SGAOR (当  $r=w$  时为 SGSOR) 迭代矩阵谱半径  $\rho(\Psi_{w,r})$  (或  $\rho(\Psi_{w,w})$ ) 的最小值, 并与 SAOR 方法 (或 SSOR 方法) 及 SOR (或 SOR) 方法加以比较, 其结果列于附表.

**方案 (I)** 取  $D_2=0, D_1=\text{diag}(k, k, \dots, k)$ , ( $k=3, 4, 5$ ), 取参数偶  $(w, r)$  如下

$$w = 0.01(0.01)(1.99/\bar{d}), \quad (31a)$$

$$w + \{[100(w + (2 - w\bar{d})/\underline{\mu})]/100\} < r < w + \{[100(w + 2 - w\bar{d})/\bar{\mu}]/100\}, \quad (31b)$$

其中  $\underline{d}, \bar{d}, \underline{\mu}, \bar{\mu}$  如节 2 推论 1 所定义.

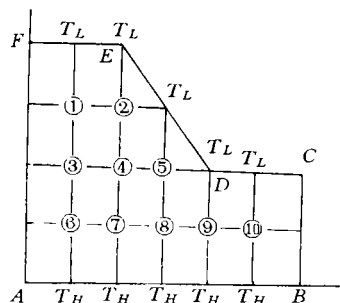
**方案 (II)** 取  $D_2=0, D_1=kD_A (k=0.1, 0.15, 0.2)$ , 取参数偶如下

$$w = 0.01(0.01)2k, \quad (32a)$$

$$w + \{[100((2k - w)/\mu'_{\min})]/100\} < r < w + \{[100((2k - w)/\mu'_{\max})]/100\}, \quad (32b)$$

其中  $k, \mu'_{\min}$  及  $\mu'_{\max}$  如节 2 推论 3 所是定义.  $[x]$  表示实数  $x$  的整数部分,  $a(0.01)b$  表示从  $a$  开始按步长 0.01 顺序取值到  $b$ .

由附表看出: (1) 最优 SGAOR 方法与最优 SGSOR 方法的谱半径哪一个较小很难说; (2) 但是, 总可选取适当的  $D_1, D_2$  及  $w, r$  使最优 SGAOR (SGSOR) 方法的谱半径比相应的 SAOR (SSOR) 方法的谱半径小, 从而加快收敛速度; (3) 附表中所列最优 SGAOR 方法谱半径并不小于相应的最优 AOR 方法的谱半径, 但这种  $D_1, D_2$  应该是可以找到的. 如果找到  $D_1, D_2$  及参数偶使  $\rho(\Psi_{w,r})=0$  则敛速最快. 显然这是一个尚待研究的课题; (4) 由于  $A$  正定对称, 且  $(w, r)$  满足节 2 推论 1 及推论 3 条件, SGAOR 方法的 Jacobi 迭代阵的特征值全为实数, 然而对 AOR 方法而言这一事实通常并非是真的. 因此, 半迭代技巧可用来加速 SGAOR 方法的收敛性.



附图 多角形区域

附表 迭代矩阵的谱半径比较表

方 法	$k$	Jacobi 阵谱半径	最佳松弛因子 ( $w, r$ )	相应迭代矩阵 最小谱半径
SGAOR 方法 方案(I) $D_2=0$ $D_1=\text{diag}[k, k, \cdots, k, ]$ ( $w=r$ 为 SGAOR 方法)	3	$\bar{\mu}=0.903\ 763$	(0.779 877 6, 0.999 659 4) (0.959 099 4, 0.959 099 4) (0.589 999 8, 0.699 237 1)	0.338 9942 2 0.324 502 4 0.350 809 2
	4	$\bar{\mu}=0.677\ 823$	(1.293 999 , 1.293 099 ) (1.600 000 , 1.491 270)	0.336 798 5 0.311 040
	5	$\bar{\mu}=0.513\ 561$	(1.650 000 , 1.650 000)	0.333 600
	0.1	$\mu'_{\max}=0.754\ 166\ 8$	(0.120 000, 0.098 784 5) (0.120 000 , 0.120 000 ) (0.180 000 , 0.148 177 )	0.325 427 5 0.325 950 6 0.325 427 7
	0.15	$\mu'_{\max}=0.754\ 166\ 8$	(0.180 000 , 0.180 000 ) (0.230 000 , 0.184 917 2)	0.325 862 9 0.318 281 5
SGAOR 方法 方案(II) $D_2=0$ $D_1=kD_A$ ( $w=r$ 为 SGSOR 方法)	0.2	$\mu'_{\max}=0.754\ 166\ 8$	(0.230 000 , 0.230 000)	0.324 602 9
SAOR 方法 <sup>(3)</sup> ( $w=r$ 为 SSOR 方法)		$\bar{\mu}=0.754\ 166\ 8$	(1.08, 1.25) (1.22, 1.22)	0.353 707 0.364 841
	SAOR 方法 ( $w=r$ 为 SOR 方法)		$\bar{\mu}=0.754\ 166\ 8$	(1.21, 1.21) (1.22, 1.22)

参 考 文 献

1 Young D M. Iterative solution of large linear systems. New York:Academic,1971 . 172~176

2 Hadjidimos A. Accelerated overrelaxationMath. Comput. ,1978,(32):149~157

3 Hadjidimos A,Yeyios A. Symmetric accelerated overrelaxation(SAOR)methed Math. Comput. Cimilation, . 1982(24):72~76

4 Hadjidimos A,Psimarni A,Yeyios A. On the convergence of some generalized iterative method. LAA. , 1986,(75):117~132

5 蒋尔雄. 线性代数. 北京:高等教育出版社,1980. 351~352

6 Jennings A. Matrix computation for engineers and scientists. London:John Wiley and Sons,1977. 76~82

7 Varga R S. Matrix iteratirc analysis. Englewood Cliffs, N. J. :Prentice-Hall,1963. 83~96

Symmetric Generalized Accelerated Overrelaxation as a  
Method for Solving Linear Equation and Its Application

Zeng Wenping

(Dept of Manag. Info. Sci. ,Huaqiao Univ. ,362011,Quaazhou )

**Abstract** For solving large linear equations ,the author extends the theory underlying the method of GAOR , i. e. ,generalized accelerated overrelaxation and presents a method known as symmetric GAOR. This is done in a way similar to the derivation of SAOR or SSOR method from that of AOR or SOR respectively. The validity of the method of symmetric GAOR is confirmed by theoretical and computational results.

**Keywords** linear equation,symmetric generalized accelerated overrelaxation,convergence