第 16 卷 第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 16 No. 3
1995 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 1995

算子方程解的存在性*

张　上　泰

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要　考虑算子方程 $Tx=x$ 解的存在性，目的是要改善作者和 Sărmans 等的一些结论．在算子单调性的条件下，给出存在性的构造性证明．

关键词　算子方程，解，存在性，单调迭代术

分类号　O 175.3

在本文的讨论中，恒假定实线性系统 $\mathscr{X}$ 中有一个部分序 $\leqslant$，而且 $\mathscr{X}$ 中每一个有上界的简单有序集都有一个最小的上界．详言之，一个 Abel 加群对实数域定义了数乘，满足通常的公理，就称它是一个实线性系统．如果实线性系统 $\mathscr{X}$ 中某些元对规定了 $x\geqslant y$ 的部分系关系，满足：(1)对所有的 $x\in\mathscr{X}$，有 $x\geqslant x$(反身性)；(2)如果 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant x$，则 $x=y$(反对称性)；(3)如果 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant z$，则 $x\geqslant z$(递推性)．同时此部分序关系使得变换 $x\to x+r$(r 固定)和 $x\to\alpha x$($\alpha>0$)在线性系统 $\mathscr{X}$ 中诱导一个序自同构，那么我们就称 $\mathscr{X}$ 是一个部分序(实)线性系统[1]．我们要用到文〔2〕中的引理，即

引理　假如 $x_0,y_0\in\mathscr{X}$($x_0\leqslant y_0$)是两个给定初始元，满足 $Tx_0\geqslant x_0$，$Ty_0\leqslant y_0$；此外假定算子 T 在序区间 $[x_0,y_0]$ 上单调增加(保序)，即从 $x_0\leqslant x\leqslant y\leqslant y_0$ 可得 $Tx\leqslant Ty$．那末迭代

$$\begin{cases}x_{n+1}=Tx_n\\ y_{n+1}=Ty_n\end{cases}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

之下有 $x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant y_n\leqslant\cdots\leqslant y_2\leqslant y_1\leqslant y_0$，而且算子方程 $Tx=x$ 在每个序区间 $[x_n,y_n]$($n=0,1,2,\cdots$)上都至少有一个解．

1　单调减算子的讨论

上面研究的是单调增算子的情况，从假定满足相应条件的初始元 x_0 和 y_0 出发，通过通常使用的程序去迭代，从而得到解的存在性定理．本文首先要证明对于单调减算子的情况，也可建立与上述类似的定理，而且只要假定知道一个满足相应条件的初始元 y_0 即可．

定理 1　假如 $y_0\in\mathscr{X}$ 是给定的初始元，满足 $By_0\leqslant y_0$，$B(By_0)\leqslant y_0$；此外假定算子 B 在序区间 $[By_0,y_0]$ 上单调减少(反序)，即从 $By_0\leqslant x\leqslant y\leqslant y_0$ 可得 $By\leqslant Bx$；又存在某正数 α 使算子 $B+\alpha I$ 在 $[By_0,y_0]$ 上单调增加，其中 I 表示恒等算子．那末在迭代 $y_{n+1}=By_n$($n=0,1,2,\cdots$)之

* 本文 1994-11-06 收到；福建省自然科学基金资助项目

下有 $y_1 \leqslant y_3 \leqslant y_5 \leqslant \cdots \leqslant y_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{2n} \leqslant \cdots \leqslant y_4 \leqslant y_2 \leqslant y_0$，而且算子方程 $By=y$ 在每个序区间 $[y_{2n+1}, y_{2n}]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上均至少有一个解．

证 由初始条件 $y_1=By_0 \leqslant y_0$，$y_2=B(By_0) \leqslant y_0$，利用算子 B 在 $[y_1, y_0]$ 的递减性可以依序得到如下不等式

$$\begin{cases} y_1 \leqslant y_0, y_2 \geqslant y_1, y_3 \leqslant y_2, y_4 \geqslant y_3, \cdots \\ y_2 \leqslant y_0, y_3 \geqslant y_1, y_4 \leqslant y_2, y_5 \geqslant y_3, \cdots \end{cases}$$

整理上式，可得到如下交错两端逼近序列 $y_1 \leqslant y_3 \leqslant y_5 \leqslant \cdots \leqslant y_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{2n} \leqslant \cdots \leqslant y_4 \leqslant y_2 \leqslant y_0$.

现在来证明对每一个 n，算子方程 $By=y$ 在序区间 $[y_{2n+1}, y_{2n}]$ 上都至少有一个解存在．令算子

$$T = \frac{1}{1+\alpha}(B+\alpha I),$$

则利用 B 的递减法和 $y_{2n+1} \leqslant y_{2n}$，得

$$\begin{aligned} Ty_{2n+1} &= \frac{1}{1+\alpha}(B+\alpha I)y_{2n+1} = \frac{1}{1+\alpha}(By_{2n+1}+\alpha y_{2n+1}) \\ &\geqslant \frac{1}{1+\alpha}(By_{2n}+\alpha y_{2n+1}) = \frac{1}{1+\alpha}(y_{2n+1}+\alpha y_{2n+1}) = y_{2n+1}. \end{aligned}$$

类似地，利用 B 的递减性和 $y_{2n-1} \leqslant y_{2n}$，可得 $Ty_{2n} \leqslant y_{2n}$. 由定理假设和 $\alpha>0$，知算子 T 在序区间 $[y_{2n+1}, y_{2n}]$ 上是单调增加的．根据引理存在 y^*，满足 $y_{2n+1} \leqslant y^* \leqslant y_{2n}$，$Ty^*=y^*$；即 $(By^*+\alpha y^*)/(1+\alpha)=y^*$，也即 $By^*=y^*$. 这样就证明了 y^* 是算子 B 在 $[y_{2n+1}, y_{2n}]$ 上的一个解．

推论 1 假如 $y_0 \in \mathscr{X}$ 是给定的初始元，满足 $By_0 \leqslant y_0$，此外假定在序区间 $[By_0, y_0]$ 上算子 B 单调减少，而算子 $B+I$ 单调增加，那末在迭代 $y_{n+1}=By_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 之下有 $y_1 \leqslant y_3 \leqslant y_5 \leqslant \cdots \leqslant y_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{2n} \leqslant \cdots \leqslant y_4 \leqslant y_2 \leqslant y_0$，而且算子方程 $By=y$ 在每个序区间 $[y_{2n+1}, y_{2n}]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上都至少有一个解．

事实上，由 $y_1 \leqslant y_0$ 和算子 $B+I$ 的递增性得 $By_1+y_1 \leqslant By_0+y_0=y_1+y_0$，此即 $y_2 \leqslant y_0$. 在定理 1 中令 $\alpha=1$ 即得本推论．

推论 2 假如 $x_0 \in \mathscr{X}$ 是给定的初始元，满足 $Bx_0 \geqslant x_0$，$B(Bx_0) \geqslant x_0$. 此外假定算子 B 在序空间 $[x_0, Bx_0]$ 上单调减少，但存在某正数 α，使算子 $B+\alpha I$ 在 $[x_0, Bx_0]$ 上单调增加，那么在迭代 $x_{n+1}=Bx_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 之下有 $x_0 \leqslant x_2 \leqslant x_4 \leqslant \cdots \leqslant x_{2n} \leqslant \cdots \leqslant x_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant x_5 \leqslant x_3 \leqslant x_1$，而且算子方程 $Bx=x$ 在每个序区间 $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上都至少有一个解．

事实上，在定理 1 中取 $y_0=x_1$，则由假设 $y_0 \geqslant x_0$ 和 $y_1 \geqslant x_0$ 以及 B 的递减性得 $By_0 \leqslant y_0$ 和 $B(By_0) \leqslant y_0$，从而满足定理 1 的条件，进而不难得知此推论的真确性．须指出，运用推论 1 的方法，在推论 2 中令 $\alpha=1$ 即得文[2]中的定理 1.

2 非单调算子的讨论

上面讨论了单调(增或减)的算子方程解的存在性，并且给出迭代程序，用两边单调逼近的序列去界定解所在的小区间．下面我们来讨论一类非单调的算子方程，也就是单调可分解的算子方程 $Ax+r=x$（r 为常量），其中算子 A 可分解为单调增加算子 T 与单调减少算子 B 之和，即 $A=T+B$. 讨论这类问题，通常认定 $\mathscr{X}$ 中已有两个初始元 x_0 和 y_0 $(x_0 \leqslant y_0)$ 满足条件

$$\left.\begin{aligned} Tx_0 + By_0 + r \geqslant x_0, \\ Ty_0 + Bx_0 + r \leqslant y_0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在通常的迭代程序

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} = Tx_n + By_n + r \\ y_{n+1} = Ty_n + Bx_n + r \end{aligned} \quad (n = 0,1,2,\cdots)\right\} \tag{2}$$

之下,正如 L. Collatz 在文〔3〕中指出的,不难用数学归纳法证明对一切 n,有

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \cdots \leqslant y_2 \leqslant y_1 \leqslant y_0. \tag{3}$$

然后去研究方程在序区间〔x_n, y_n〕上有解的条件,如文〔2〕～〔6〕. 为了提高序列逼近的速度,后来有人(如文〔4〕)将程序(2)改进为

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} = Tx_n + By_n + r \\ y_{n+1} = Ty_n + Bx_{n+1} + r \end{aligned} \quad (n = 0,1,2,\cdots)\right\} \tag{4}$$

此时初始条件自然应有 $x_0 \leqslant y_0$,且

$$\left.\begin{aligned} y_0 \geqslant Tx_0 + By_0 + r \geqslant x_0, \\ Ty_0 + Bx_1 + r \leqslant y_0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Sărman 和 Albrecht 在文〔1〕中就 n 维欧几里得空间 R^n 中算子 A 全连续的情况证明了:在初始条件(5)和迭代程序(4)之下,方程 $Ax+r=x$ 在每个区间〔x_n, y_n〕中都至少有一个解. 现在,我们要把 R^n 拓广至部分序线性空间 $\mathscr{X}$,而把算子 A 全连续性的要求改换成存在某个大正数 α,使算子 $A+\alpha I$ 成为单调增加,来证明上述结论仍然成立,即

定理 2　假设有满足式(5)的初始元 x_0 和 y_0,另外存在一个 $\alpha>0$,使算子 $A+\alpha I$ 在序区间〔x_0, y_0〕上单调增加,那么在迭代(4)之下有

$$x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \cdots \leqslant y_2 \leqslant y_1 \leqslant y_0, \tag{6}$$

而且方程 $Ax+r=x$ 在每个序区间〔x_n, y_n〕$(n=0,1,2,\cdots)$上都至少有一个解.

证　根据式(5)和算子 T 的递增性以及算子 B 的递减性,得 $x_0 \leqslant x_1 = Tx_0 + By_0 + r \leqslant Ty_0 + Bx_1 + r = y_1 \leqslant y_0$. 由此作为归纳的基础,利用算子 T 的递增性和算子 B 的递减性,使用数学归纳法不难证得式(6).

令单调增加算子 T_1 为 $T_1x = [(A+\alpha I)x + r]/(1+\alpha)$,由 $x_n \leqslant y_n$ 和算子 B 的递减性知

$$\begin{aligned} T_1x_n &= (Ax_n + \alpha x_n + r)/(1+\alpha) = (Tx_n + Bx_n + \alpha x_n + r)/(1+\alpha) \\ &\geqslant (Tx_n + By_n + \alpha x_n + r)/(1+\alpha) = (x_{n+1} + \alpha x_n)/(1+\alpha) \\ &\geqslant (x_n + \alpha x_n)/(1+\alpha) = x_n. \end{aligned}$$

另方面,由 $x_{n+1} \leqslant y_n$ 得

$$\begin{aligned} T_1y_n &= (Ay_n + \alpha y_n + r)/(1+\alpha) = (Ty_n + By_n + \alpha y_n + r)/(1+\alpha) \\ &\leqslant (Ty_n + Bx_{n+1} + \alpha y_n + r)/(1+\alpha) = (y_{n+1} + \alpha y_n)/(1+\alpha) \\ &\leqslant (y_n + \alpha y_n)/(1+\alpha) = y_n. \end{aligned}$$

根据引理在区间〔x_n, y_n〕上至少有一个 x^* 使得 $T_1x^* = x^*$,即 $(Ax^* + \alpha x^* + r)/(1+\alpha) = x^*$,也即 $Ax^* + \alpha x^* + r = (1+\alpha)x^*$,$Ax^* + r = x^*$. 这就证明了 x^* 是方程 $Ax+r=x$ 在〔x_n, y_n〕上的一个解.

观察这个定理的证明过程,不难看出:在另一种初始条件(1)和另一种迭代程序(2)下,同

样假定存在一个大 $\alpha>0$,使算子 $A+\alpha I$ 在区间 $[x_0,y_0]$ 上单调增加,也可证得方程 $Ax+r=x$ 在每个区间 $[x_n,y_n]$ 上都至少有一个解.

例 我们用积分方程中一个例子来说明定理的应用. 设 G 是 n 维欧氏空间中一个可测集(mesG<∞),$R(t,s,u)$ 是满足通常的 Caratheodory 条件,而且是关于 u 单调增加的非负函数. 考虑 L_p 空间中非线性积分方程

$$\int_G R[t,s,u(s)]\mathrm{d}s+\alpha e^{-u(t)}+r=u(t) \tag{7}$$

的非负解,这里 α 与 r 是某两个正数.

我们选取 L_p 中全体非负函数构成的锥体来引入半序. 此时算子 $Tu(t)=\int_G R[t,s,u(s)]\mathrm{d}s$ 是单调增加的,而算子 $Bu(t)=\alpha e^{-u(t)}$ 是单调减少的. 但是算子 $A+\alpha I=T+B+\alpha I$ 不难验知是单调增加的,从而满足定理2的条件. 于是由定理2知在初始条件(5)之下,方程(7)在每个序区间 $[x_n,y_n]$ 中都至少有一非负解.

3 可加算子的讨论

最后,我们来讨论可分解算子 A 具有可加性的情形. 在初始条件(1)和迭代(2)之下,文[5]中定理3在假定算子 A 具有可加性的条件下,证明了方程 $Ax+r=x$ 在每个 $[x_n,y_n]$ 上都有解存在. 在这里,我们要指出:对于初始条件(5)和迭代程序(4),上述论断仍然成立. 由于证明比原来的复杂,下面给予论述.

定理3 假设有初始条件(5),而算子 A 在 $[x_0,y_0]$ 可加,那末在迭代(4)之下有式(6),而且方程 $Ax+r=x$ 在每个序区间 $[x_n,y_n]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上都至少有一个解.

证 引入新的乘积空间 $\hat{\mathscr{X}}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathscr{X}\}$,按通常的方法定义加法和数乘法,使它成为线性空间. 如果 $x>\varphi,y\leqslant\varphi$ 或 $x\geqslant\varphi,y<\varphi$ 则规定 $(x,y)>(\varphi,\varphi)$. 利用此关系在 $\hat{\mathscr{X}}$ 中引入半序:如果 $(x,y)-(x',y')>(\varphi,\varphi)$,那末 $(x,y)>(x',y')$. 此时 $\hat{\mathscr{X}}$ 中的上确界为 $\sup(x,y)=(\sup x,\inf y)$,不难验证 $\hat{\mathscr{X}}$ 成为一个部分序线性系统.

其次,我们在 $\hat{\mathscr{X}}$ 中引入算子 $\hat{A}(x,y)=(Tx+By+r,Ty+B(Tx+By+r)+r)$. 下面验证它在区间 $[(x_0,y_0),(y_0,x_0)]$ 上是单调增加的. 任取此区间中两元 (x,y) 和 (x',y'),设 $(x,y)\leqslant(x',y')$,根据算子 T 与 B 的增减性有 $Tx+By+r\leqslant Tx'+By'+r$,$Ty+B(Tx+By+r)+r\geqslant Ty+B(Tx'+By'+r)+r\geqslant Ty'+B(Tx'+By'+r)+r$,由此得出 $\hat{A}(x,y)\leqslant\hat{A}(x',y')$.

观察定理2的证明,知道式(6)的真确性仍然存在. 由此可得 $(x_n,y_n)\leqslant(y_n,x_n)$,$(n=0,1,2,\cdots)$. 现证明

$$\begin{cases}\hat{A}(x_n,y_n)\geqslant(x_n,y_n),\\ \hat{A}(y_n,x_n)\leqslant(y_n,x_n).\end{cases}$$

显然 $\hat{A}(x_n,y_n)=(Tx_n+By_n+r,Ty_n+B(Tx_n+By_n+r)+r)=(x_{n+1},y_{n+1})\geqslant(x_n,y_n)$. 另外,由于 $y_n=Ty_{n-1}+Bx_n+r\geqslant Ty_n+Bx_n+r$,从而

$$\begin{aligned}\hat{A}(y_n,x_n)&=(Ty_n+Bx_n+r,Tx_n+B(Ty_n+Bx_n+r)+r)\\&\leqslant(y_n,Tx_n+By_n+r)=(y_n,x_{n+1})\leqslant(y_n,x_n).\end{aligned}$$

根据引理方程 $\hat{A}(x,y)=(x,y)$,在区间 $[(x_n,y_n),(y_n,x)]$ 上有解 (x^*,y^*),$(x_n,y_n)\leqslant$

$(x^*, y^*) \leqslant (y_n, x_n)$，$\hat{A}(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$. 从而

$$\begin{cases} x^* = Tx^* + By^* + r, \\ y^* = Ty^* + B(Tx^* + By^* + r) + r = Ty^* + Bx^* + r. \end{cases}$$

把此两等式相加，得 $x^* + y^* = Tx^* + Bx^* + Ty^* + By^* + 2r = Ax^* + Ay^* + 2r$，再利用算子 A 的可加性，得 $A(x^* + y^*) + 2r = x^* + y^*$，$A[(x^* + y^*)/2] + r = (x^* + y^*)/2$. 显然，$x_n \leqslant (x^* + y^*)/2 \leqslant y_n$，这就证明了定理3.

参　考　文　献

1 Hille E, Phillips R S. Functional analysis and semi-groups. New York: Amer. Math. Soc. Colloquium Publ, 1957. 1～460

2 张上泰. 部分序线性系统中算子方程的一些问题. 数学年刊, 1983, (4): 621～624

3 Collatz L. 数值数学的理论基础. 数学译丛(中文), 1964, (4): 1～17

4 Sărman S, Albrecht J. Bemerkungen zur iteration mit monoton zerlegbaren operatoren. Z. Angew. Math. Mech., 1972, 52: 554～556

5 张上泰. 关于数值数学的一个典型问题. 数学学报, 1979, 22: 667～674

6 Collatz L. 作为数值数学中辅助工具的泛函分析. 数学译丛(中文), 1966, (4): 53～60

Existence of Solutions to Operator Equations

Zhang Shangtai

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For improving some conclusions in references (1)～(3), the existence of solutions to operator equation $Tx = x$ is considered. The existence of constructive proof is given under the condition of the monotonicity of operator.

Keywords operator equation, solution, existence, monotone iterative technique