第 16 卷　第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 16　No. 3
1995 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 1995

USSOR 迭代法和 Jacobi 迭代法的敛散性*

陈 恒 新

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要　证明了当 Jacobi 迭代矩阵 B 非负时，解线性方程组(系数矩阵为不可约)的 USSOR 法($0<\omega_1,\omega_2<1$)和 Jacobi 法同时敛散. 给出了 USSOR 法迭代矩阵之谱半径 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})$ 和 $\rho(B)$ 之间的关系.

关键词　USSOR 迭代法，Jacobi 迭代法，收敛性，发散性

分类号　O 241.6

1　USSOR 迭代法和非负矩阵的性质

求解线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的非对称逐次超松弛迭代法，简称为 USSOR 法，包含了对称逐次超松弛法(即 SSOR 法)和 SOR 法．文[1]在系数矩阵 A 为 Hermite 正定阵，非奇异 H-阵的情况下，给出了 USSOR 法的收敛性，文[2]给出了 USSOR 法的误差界．本文则证明了当 A 的 Jacobi 迭代矩阵 $B\geqslant 0$ 时(它包括了 A 为 L-矩阵的矩阵类)，解 $AX=\boldsymbol{b}$(系数矩阵为不可约)的 USSOR 迭代法(松弛因子 $0<\omega_1<0$, $0<\omega_2<1$)和 Jacobi 迭代法同时敛散，给出了 USSOR 法迭代矩阵之谱半径 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})$ 和 $\rho(B)$ 之间的关系式．

对于线性方程组

$$AX=\boldsymbol{b}, \tag{1}$$

设 $A=D-E-F$ 是 $n\times n$ 实矩阵，其中 D 是非奇异对角阵，E 是严格下三角阵，F 是严格上三角阵．记 $L=D^{-1}E$, $U=D^{-1}F$ 则矩阵 A 之 Jacobi 迭代矩阵为 $B=D^{-1}E+D^{-1}F=L+U$.

于是求解方程组(1)之 USSOR 迭代法为

$$X^{(m+1)}=\varphi_{\omega_1,\omega_2}X^{(m)}+(\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2)(I-\omega_2U)^{-1}\times(I-\omega_1L)^{-1}D^{-1}\boldsymbol{b}\quad(\omega_1,\omega_2\text{ 为实数}, m=0,1,2,\cdots), \tag{2}$$

其中 USSOR 法迭代矩阵为

$$\begin{aligned}\varphi_{\omega_1,\omega_2}&=(I-\omega_2U)^{-1}[(1-\omega_2)I+\omega_2L](I-\omega_1L)^{-1}[(1-\omega_1)I+\omega_1U]\\&=(I-\omega_2U)^{-1}(I-\omega_1L)^{-1}[(1-\omega_2)I+\omega_2L][(1-\omega_1)I+\omega_1U],\end{aligned} \tag{3}$$

定义　对于 $n\times n$ 实矩阵 G,M 及 N，如果 M 非奇异，并且有 $M^{-1}\geqslant$ 和 $N\geqslant 0$，则称 $G=M-N$

* 本文 1994-10-28 收到；福建省自然科学基金资助项目

为矩阵 G 的正规分裂.

由文〔3〕定理 3.8,定理 3.13,定理 2.1 和类似定理 2.2 的证明,可得下述引理 1~4.

引理 1 设 $n\times n$ 矩阵 $G\geqslant 0$,则 $I-G$ 非奇异且 $(I-G)^{-1}\geqslant 0$ 的充要条件是 $\rho(G)<1$.

引理 2 设 $G=M-N$ 为矩阵 G 的正规分裂,并且 $G^{-1}\geqslant 0$,则 $\rho(M^{-1}N)<1$.

引理 3 若 $G\geqslant 0$ 为不可约 $n\times n$ 矩阵,则对于 $\rho(G)$,存在 $\rho(G)=\lambda>0$ 及相应特征向量 $X>0$,使 $GX=\lambda X$.

引理 4 设 $G=[g_{ij}]\geqslant 0$ 为 $n\times n$ 矩阵,则对任一向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}>0$,成立

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j/x_i\right)\leqslant\rho(G)\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j/x_i\right).$$

2 USSOR 迭代法和 Jacobi 迭代法的敛散关系

定理 设线性方程组(1)的系数矩阵 A 不可约,其 Jacobi 迭代矩阵 $B=L+U\geqslant 0$,$\varphi_{\omega_1,\omega_2}$ 为形如式(3)的 USSOR 法迭代矩阵,则对于 $0<\omega_1<1,0<\omega_2<1$ 有:

(i) $\rho(B)>0$, $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>(1-\omega_1)(1-\omega_2)$;

(ii) $0<\rho(B)<1\Leftrightarrow(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})<1$;

(iii) $\rho(B)=1\Leftrightarrow\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})=1$;

(iv) $\rho(B)>1\Leftrightarrow\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>1$.

即 USSOR 迭代法式(2)和 Jacobi 迭代法同时敛散.

证 因为 USSOR 法之迭代阵

$$\varphi_{\omega_1,\omega_2}=(I-\omega_2U)^{-1}(I-\omega_1L)^{-1}[(1-\omega_2)I+\omega_2L][(1-\omega_1)I+\omega_1U],$$

由于 $\rho(\omega_1L)=\rho(\omega_2U)=0$,由引理 1 知 $(I-\omega_2U)^{-1}\geqslant 0$,$(I-\omega_1L)^{-1}\geqslant 0$,因此

$$\begin{aligned}\varphi_{\omega_1,\omega_2}&=(I+\omega_2U+\omega_2^2U^2+\cdots)(I+\omega_1L+\omega_1^2L^2+\cdots)[(1-\omega_1)(1-\omega_2)I\\&\quad+\omega_2(1-\omega_1)L+\omega_1(1-\omega_2)U+\omega_1\omega_2LU]\\&\geqslant(1-\omega_1)(1-\omega_2)I+\omega_2(1-\omega_1)L+\omega_1(1-\omega_2)U.\end{aligned}\tag{4}$$

因为 $A=D-E-F=D(I-L-U)$ 为不可约矩阵,从而 $(I-L-U)=D^{-1}A$ 为不可约矩阵,由于 $0<\omega_1<1,0<\omega_2<1$,所以 $(1-\omega_1)(1-\omega_2)I+\omega_2(1-\omega_1)L+\omega_1(1-\omega_2)U\geqslant 0$ 且不可约.于是可知 USSOR 法迭代矩阵 $\varphi_{\omega_1,\omega_2}\geqslant 0$ 且不可约.

由引理 3 知,对于 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})$,存在 $\lambda=\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>0$ 和相应特征向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}>0$ 使 $\varphi_{\omega_1,\omega_2}X=\lambda X$,即

$$[(I-\omega_1L)(I-\omega_2U)]^{-1}[(1-\omega_2)I+\omega_2L][(1-\omega_1)I+\omega_1U]X=\lambda X,$$

$$[(1-\omega_2)I+\omega_2L][(1-\omega_1)I+\omega_1U]X=\lambda[(I-\omega_1L)(I-\omega_2U)]X,$$

$$\begin{aligned}&[(1-\omega_1)(1-\omega_2)I+\omega_2(1-\omega_1)L+\omega_1(1-\omega_2)U+\omega_1\omega_2LU]X\\&\quad=\lambda[I-\omega_1L-\omega_2U+\omega_1\omega_2LU]X.\end{aligned}$$

因此由上式便有式(5)和式(6),即

$$\begin{aligned}&(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)LX+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)UX\\&\quad+(1-\lambda)\omega_1\omega_2LUX=[\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]X,\end{aligned}\tag{5}$$

$$(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)LX+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)UX$$

$$=(\lambda-1)\omega_1\omega_2 LUX+[\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]X, \tag{6}$$

现证(i)，先证 $\rho(B)>0$，因 $I-L-U$ 为不可约矩阵，从而 $B=L+U\geqslant 0$ 为不可约矩阵，由引理 3 便得 $\rho(B)>0$.

再来证 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>(1-\omega_1)(1-\omega_2)$.

若 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})\geqslant 1$，因已知 $0<\omega_i<1$，$i=1,2$. 有 $-1<\omega_i-1<0<1$，即 $|\omega_i-1|<1$，$i=1,2$. 因此有

$$(1-\omega_1)(1-\omega_2)=|(1-\omega_1)(1-\omega_2)|=|\omega_1-1||\omega_2-1|<1, \tag{7}$$

所以 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})\geqslant 1>(1-\omega_1)(1-\omega_2)$.

若 $\lambda=\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})<1$，考虑式(5)，因其左端非负，所以 $\lambda\geqslant(1-\omega_1)(1-\omega_2)$. 且由式(5)有

$$(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)LX+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)UX\leqslant[\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]X.$$

若 $\lambda=(1-\omega_1)(1-\omega_2)$，则由上式有

$$(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)LX+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)UX\leqslant 0,$$

即 $(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}x_j+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)\sum_{j=i+1}^{n}b_{ij}x_j\leqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

因 $\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1>0$，$\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2>0$，$B=[b_{ij}]\geqslant 0$，$x_j>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 可知 $B=[b_{ij}]=0$，从而 $\rho(B)=0$，与 $\rho(B)>0$ 矛盾，所以 $\lambda\neq(1-\omega_1)(1-\omega_2)$. 因此 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>(1-\omega_1)(1-\omega_2)$.

至此，已证结论(i).

现证(ii)，若 $0<\rho(B)<1$，记 $M_{\omega_1,\omega_2}=(I-\omega_1L)(I-\omega_2U)$，$N_{\omega_1,\omega_2}=[(1-\omega_1)(1-\omega_2)I+\omega_2(1-\omega_1)L+\omega_1(1-\omega_2)U+\omega_1\omega_2LU]$，则 $\varphi_{\omega_1,\omega_2}=M^{-1}_{\omega_1,\omega_2}N_{\omega_1,\omega_2}$. 因

$$M^{-1}_{\omega_1,\omega_2}=(I-\omega_2U)^{-1}(I-\omega_1L)^{-1}\geqslant 0,\ N_{\omega_1,\omega_2}\geqslant 0,$$

由定义知 $T_{\omega_1,\omega_2}=M_{\omega_1,\omega_2}-N_{\omega_1,\omega_2}$ 为正规分裂.

$T_{\omega_1,\omega_2}=M_{\omega_1,\omega_2}-N_{\omega_1,\omega_2}=[I-\omega_1L-\omega_2U+\omega_1\omega_2LU]-[(1-\omega_1)(1-\omega_2)I+\omega_2(1-\omega_1)L+\omega_1(1-\omega_2)U+\omega_1\omega_2LU]=(\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2)I-(\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2)(L+U)=(\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2)(I-B)$.

因由式(7)有 $1-\omega_1-\omega_2+\omega_1\omega_2<1$，即有 $\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2>0$. 因 $B\geqslant 0$，$0<\rho(B)<1$，由引理 1 知

$$T^{-1}_{\omega_1,\omega_2}=\frac{1}{\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2}(I-B)^{-1}\geqslant 0.$$

这样由引理 2 可得 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})=\rho(M^{-1}_{\omega_1,\omega_2}N_{\omega_1,\omega_2})<1$. 又由本定理结论(i) $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>(1-\omega_1)(1-\omega_2)$，所以有

$$(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})<1.$$

若 $(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\lambda=\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})<1$，由式(5)有

$$(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)LX+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)UX\leqslant[\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]X$$

因 $\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1>0$，$\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2>0$，$b_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$ 则有

$$\begin{aligned}&\min\{\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1,\ \omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2\}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j\\ &\leqslant(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}x_j+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)\sum_{j=i+1}^{n}b_{ij}x_j\\ &\leqslant[\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]x_i,\ i,1,2,\cdots,n,\end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{x_i} \leqslant \frac{\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{\min\{\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1,\ \omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2\}}.\ i=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

因$(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\lambda<1$，由定理已知条件有$1-\omega_k>0(k=1,2)$，所以有

$$\lambda(1-\omega_k)<1-\omega_k,\ \lambda-1<-\omega_k+\lambda\omega_k,$$

得

$$0<\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)=\lambda-1+\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2<\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2-\omega_k+\lambda\omega_k,$$

$$\begin{cases}0<\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1,\\ 0<\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2,\end{cases}$$

所以有

$$0<\frac{\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{\min\{\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1,\ \omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2\}}<1. \tag{9}$$

于是由式(8),(9)有$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j/x_i<1$，$i=1,2,\cdots,n$ 由引理4便得$\rho(B)<1$,又由本定理结论(i)，所以 $0<\rho(B)<1$.

现证(iii)$\Leftarrow$，若$\lambda=\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})=1$，由式(5)有

$$(\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2)(L+U)X=[1-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]X=(\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2)X,$$

因由已知条件$0<\omega_k<1$ $(k=1,2)$知式(7)成立,从而有$\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2>0$. 因此有$(L+U)X=X$,即$BX=X$,因$X>0$，所以有

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j/x_i=1,\ i=1,2,\cdots,n,$$

由引理4,便得$\rho(B)=1$.

现证(iv)$\Leftarrow$，若$\lambda=\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>1$，由式(6)有

$$(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)LX+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)UX\geqslant[\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]X,$$

因$\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1>0$，$\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2>0$，则有

$$\begin{aligned}&\max\{\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1,\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2\}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\\ &\geqslant(\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1)\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j+(\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2)\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j\\ &\geqslant[\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)]x_i,\ i=1,2,\cdots,n,\end{aligned}$$

得

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{x_i}\geqslant\frac{\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{\max\{\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1,\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2\}}.\ i=1,2,\cdots,n, \tag{10}$$

因$\lambda>1$，$1-\omega_k>0$ $(k=1,2)$，所以有

$$\lambda(1-\omega_k)>1-\omega_k,\quad \lambda-1>-\omega_k+\lambda\omega_k,$$

$$\begin{aligned}\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)&=\lambda-1+\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2\\ &>\omega_1+\omega_2-\omega_1\omega_2-\omega_k+\lambda\omega_k,\ k=1,2,\end{aligned}$$

即有

$$\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)>\omega_2(1-\omega_1)\lambda\omega_1>0,$$

$$\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)>\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2>0,$$

所以得

$$\frac{\lambda-(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{\max\{\omega_2(1-\omega_1)+\lambda\omega_1,\omega_1(1-\omega_2)+\lambda\omega_2\}}>1, \tag{11}$$

于是由式(10)，式(11)便有 $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j/x_i>1$，$i=1,2,\cdots,n$. 由引理 4，便得 $\rho(B)>1$.

对于(iii)⇒，反证，若 $\rho(B)=1$，但 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})\neq 1$，则由(i)知 $(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})<1$ 或 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>1$，由(ii)⇐和(iv))⇐即得 $0<\rho(B)<1$ 或 $\rho(B)>1$，与已知⇒$\rho(B)=1$ 矛盾．所以 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})=1$.

对于(iv)⇒，反证，若 $\rho(B)>1$，但 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})\leqslant 1$，由(ii)，(iii)即可得 $\rho(B)\leqslant 1$，矛盾，所以 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>1$.

至此已证完本定理结论(i)～(iv).

证毕．

在本文定理中取 $\omega_1=\omega_2=\omega$，便得下述推论．

推论　设线性方程组(1)的系数矩阵 A 不可约，其 Jacobi 迭代矩阵 $B=L+U\geqslant 0$，则对于 SSOR 法迭代矩阵 $\varphi_\omega=(I-\omega U)^{-1}[(1-\omega)I+\omega L](I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega U]$，$0<\omega<1$. 有

(i)　$\rho(B)>0$，$\rho(\varphi_\omega)>(1-\omega)^2$；

(ii)　$0<\rho(B)<1\Leftrightarrow(1-\omega)^2<\rho(\varphi_\omega)<1$；

(iii)　$\rho(B)=1\Leftrightarrow\rho(\varphi_\omega)=1$；

(iv)　$\rho(B)>1\Leftrightarrow\rho(\varphi_\omega)>1$.

即 SSOR 迭代法和 Jacobi 迭代法同时敛散．

3　数值例子

由于 USSOR 法之迭代矩阵

$$\varphi_{\omega_1,\omega_2}=(I-\omega_2U)^{-1}[(1-\omega_2)I+\omega_2L](I-\omega_1L)^{-1}[(1-\omega_1)I+\omega_1U]$$

形式较复杂，计算麻烦，因此要直接判别其敛散性是比较困难的．但当方程组(1)之系数矩阵 A 满足本文定理条件时，可通过计算其 Jacobi 迭代矩阵 B 之谱半径来判别 USSOR 法之敛散性，这样就简单多了．

例 1　设方程组(1)之系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix},$$

则 A 为不可约矩阵，其 Jacobi 迭代矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/3\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

取 $X=(1,\ 1,\ 5/2)^{\mathrm T}$，则 $BX=(7/8,\ 5/6,\ 2)^{\mathrm T}$，$\sum_{j=1}^{3} b_{ij}x_j/x_i=7/8,\ 5/6,\ 4/5$ $(i=1,2,3)$. 先由引理 4 有

$$0<\frac{4}{5}=\min\left(\frac{7}{8},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{5}\right)\leqslant\rho(B)\leqslant\max\left(\frac{7}{8},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{5}\right)=\frac{7}{8}<1.$$

因此由本文定理知，对于 $0<\omega_1<1$，$0<\omega_2<1$，有 $(1-\omega_1)(1-\omega_2)<\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})<1$，即 USSOR 法收敛．

例2　设方程组(1)之系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1/2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -3 & 4\end{bmatrix},$$

因 A 为不可约矩阵,其 Jacobi 迭代矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1/2\\ 1 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 3/4 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0.$$

首先由非负矩阵性质有 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}\leqslant\rho(B)\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}$,因此 $\rho(B)\geqslant\min\{\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{4}\}=\frac{5}{4}>1$. 由本文定理知,对于 $0<\omega_1<1$,$0<\omega_2<1$ 有 $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})>1$,即 USSOR 法发散.

参　考　文　献

1 Krishna L B. Some new results on USSOR method. Numer. Math., 1983, (42): 155~160

2 汤健康. 关于非对称逐次超松弛方法(USSOR)的误差界. 高等学校计算数学学报,1987,(2): 149~161

3 瓦　格. 矩阵迭代分析. 上海:上海科学技术出版社,1966. 30~120

Convergence and Divergence of USSOR Iteration Method and Jacobi Iteration Method

Chen Hengxin

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　As the methods for solving linear equations with irreducible matrix of coefficients, USSOR iteration method ($0<\omega_1$, $\omega_2<1$) and Jacobi iteration method are proved to be simultaneously convergent and divergent in case Jacobi matrix B is nonnegative. The relation between spectral radius $\rho(\varphi_{\omega_1,\omega_2})$ of USSOR iterative matrix and $\rho(B)$ is given.

Keywords　USSOR iteration method, Jacobi iteration method, convergence, divergence