第16卷 第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 16 No. 2
1995年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 1995

离散定常线性系统能达性与能控性的注记*

龚 德 恩

(华侨大学工商管理系，泉州 362011)

摘要　证明离散定常线性系统能达性与能控性两种定义的等价性，并改进了能达性与能控性基本判定定理的证明．

关键词　能达性，能控性，离散定常线性系统

分类号　O 231

控制系统的能达性与能控性是两个非常重要的基本概念，在控制系统的设计中起着基础的作用．但是，目前文献中有关离散系统的这两个概念的定义并不统一，有关判定定理的证明也不够严格．本文将以文献〔1〕、〔2〕为例，讨论离散定常线性系统能达性与能控性定义的统一问题，以及有关判定定理的证明．考虑离散定常线性系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k),\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

其中 $x(k)\in R^n, u(k)\in R^m$；A 和 B 为适当维数的常数矩阵．

定义 1[1]　如果对给定的状态 $x^1\in R^n$，存在有限的时刻 N 和控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\}$，使在这一控制序列的作用下，系统(1)由初始状态 $x(0)=0$ 转移到末状态 $x(N)=x^1$，则称状态 x^1 是能达的；如果状态空间中任一状态都是能达的，则称系统(1)是完全能达的．如果对给定的 $x^0\in R^n$，存在有限的时刻 N 和控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\}$，使在这一控制序列的作用下，系统(1)由初始状态 $x(0)=x^0$ 转移到末状态 $x(N)=0$，则称状态 x^0 是能控的；如果状态空间中任一状态都是能控的，则称系统(1)是完全能控的．

定义 2[2]　如果对任给的状态 $x^1\in R^n$，存在控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\}$，使在这一控制序列的作用下，系统(1)由初始状态 $x(0)=0$ 转移到末状态 $x(N)=x^1$，则称系统(1)为 N 步能达的；如果对任给的状态 $x^0\in R^n$，存在控制序列 $\{u(0),u(1),\cdots,u(N-1)\}$，使在这一控制序列的作用下，系统(1)由初始状态 $x(0)=x^0$ 转移到末状态 $x(N)=0$，则称系统(1)为 N 步能控的．

显然，从表面上看来，定义 1 定义的完全能达(完全能控)与定义 2 定义的 N 步能达(N 步能控)是有区别的．不难看出，若系统(1) N 步能达(N 步能控)，则系统(1)完全能达(完全能控)反之是否也对呢？这里应注意的是，系统(1)完全能达(完全能控)时，对不同的状态 x^1

* 本文 1994-07-04 收到；福建省自然科学基金资助项目

(x^0),对应的 N 有可能是不同的.因此,系统(1)完全能达(完全能控)时,不一定能确定一个对所有的 $x^1\in R^n(x^0\in R^n)$ 都适用的正整数 N,使系统(1)也为 N 步能达(N 步能控)的.下面将证明两个基本定理,从而得出定义1与定义2的等价性.

1 基本定理

系统(1)的解可表示为[1]

$$x(N)=A^Nx(0)+\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu(k),\ N=1,2,\cdots \tag{2}$$

在下面定理1与定理2的证明中,记 e^i 为 n 阶单位矩阵的第 i 列,$i=1,2,\cdots,n$.

定理1 假若系统(1)完全能达(定义1),则存在正整数 N,使对任给的 $x^1\in R^n$,方程

$$x^1=\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu(k) \tag{3}$$

有解 $u(0),u(1),\cdots,u(N-1)$.

证 因系统(1)完全能达,故由定义1可知,存在正整数 N_i 和控制序列 $\overline{u}^i(0),\overline{u}^i(1),\cdots,\overline{u}^i(N_i-1)$,使系统(1)由 $x^i(0)=0$ 转移到 $x^i(N_i)=e^i$,$i=1,2,\cdots,n$.这表明,若在(2)中令 $x^i(0)=0$,$N=N_i$,则方程

$$e^i=\sum_{k=0}^{N_i}A^{N_i-k-1}B\overline{u}^i(k) \tag{4}$$

有解 $\overline{u}^i(0),\overline{u}^i(1),\cdots,\overline{u}^i(N_i-1)$,$i=1,2,\cdots,n$.令

$$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\},$$

$$u^i(k)=\begin{cases}0,k=0,1,\cdots,N-N_i-1\\ \overline{u}^i(k-N+N_i),k=N-N_i,N-N_i+1,\cdots,N-1\end{cases}. \tag{5}$$

因此,由方程(4)可知,控制序列(5)为方程

$$e^i=\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu(k) \tag{6}$$

的解,其中 $i=1,2,\cdots,n$.即在控制序列(5)的作用下,系统(1)由 $x^i(0)=0$ 转移到 $x^i(N)=e^i$,$i=1,2,\cdots,n$.

对任给的 $x^1\in R^n$,设 x^1 在基 $e^1,e^2,\cdots,e^n$ 下的坐标为 $x_1^1,x_2^1,\cdots,x_n^1$,则 $x^1=\sum_{i=1}^n x_i^1e^i$.于是,由(6)式得

$$x^1=\sum_{i=1}^n x_i^1\left[\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu^i(k)\right]=\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu(k),$$

其中 $u(k)=\sum_{i=1}^n x_i^1u^i(k)$,$k=0,1\cdots,N-1$;而 $u^i(0),u^i(1),\cdots,u^i(N-1)$ 由式(5)确定.由此可知,系统(1)完全能达时,存在正整数 N,使对任给的 $x^1\in R^n$,方程(3)恒有解.

由定理1可知,当系统(1)完全能达时(定义1),对任给的 $x^1\in R^n$,存在统一的正整数 N 和控制序列 $u(0),u(1),\cdots,u(N-1)$,使系统(1)由 $x(0)=0$ 转移到 $x(N)=x^1$,从而系统(1)也是 N 步能达的(定义2).

定理2 假若系统(1)完全能控(定义1),则存在正整数 N,使对任给的 $x^0\in R^n$,方程

$$-A^Nx^0=\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu(k) \tag{7}$$

有解 $u(0),u(1),\cdots,u(N-1)$.

证　因系统(1)完全能控，故由定义 1 可知，存在正整数 N_i 和控制序列 $\tilde{u}^i(0)$、$\tilde{u}^i(1)$，…，$\tilde{u}^i(N_i-1)$，使系统(1)由 $x^i(0)=e^i$ 转移到 $x^i(N_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$. 即方程

$$-A^{N_i}e^i=\sum_{k=0}^{N_i-1}A^{N_i-k-1}B\tilde{u}^i(k)$$

有解 $\tilde{u}^i(0),\tilde{u}^i(1),\cdots,\tilde{u}^i(N_i-1)$，$i=1,2,\cdots,n$. 令

$$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\},\ u^i(k)=\begin{cases}\tilde{u}^i(k),k=0,1,\cdots,N_i-1,\\ 0,\quad k=N_i,N_i+1,\cdots,N-1.\end{cases}\tag{8}$$

则控制序列(8)是方程

$$-A^Ne^i=\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu^i(k)\tag{9}$$

的解，$i=1,2,\cdots,n$. 即在控制序列(8)的作用下，系统(1)由 $x^i(0)=e^i$ 转移到 $x^i(N)=0$，$i=1$、$2,\cdots,n$.

对任给的 $x^0=\sum_{i=1}^{n}x_i^0e^i\in R^n$，由式(9)有

$$-A^Nx^0=-\sum_{i=1}^{n}x_i^0A^Ne^i=\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-k-1}Bu(k),$$

其中 $u(k)=\sum_{i=1}^{n}x_i^0u^i(k)$，$k=0,1,\cdots,N-1$；而 $u^i(k)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 由式(8)确定．由此可知，对任给的 $x^0\in R^n$，方程(7)有解．

由定理 2 可知，系统(1)完全能控时，必 N 步能控．

2　能达性与能控性的基本判定定理

定理 3[1]　系统(1)完全能达的充分必要条件是，对某个正整数 N，矩阵 $U_N=[B,AB,\cdots,A^{N-1}B]$ 的秩等于系统维数 n.

证　设对某个正整数 N，有 $\mathrm{rank}U_N=n$，则对任给的 $x^1\in R^n$，有 $\mathrm{rank}U_N=\mathrm{rank}[U_N,x^1]=n$，从而方程

$$x^1=\sum_{k=0}^{N-1}A^{N-K-1}Bu(k)=U_N\begin{bmatrix}u(N-1)\\ \vdots\\ u(0)\end{bmatrix}\tag{10}$$

恒有解，故系统(1)完全能达．反之，设系统(1)完全能达，则由定理 1 可知，存在正整数 N，使对任给的 $x^1\in R^n$，方程(10)恒有解．由 x^1 的任意性易知，此时必有 $\mathrm{rank}U_N=n$. 若不然，设 $\mathrm{rank}U_N=l<n$，则 U_N 中线性无关列向量的个数为 $l<n$，设 $\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_e$ 为 U_N 中 l 个线性无关列向量，取 $x^1=\tilde{x}\in R^n$，使 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{b}_1,\cdots,\tilde{b}_l$ 线性无关，则当 $\boldsymbol{x}(N)=\tilde{x}$ 时，方程(10)无解，矛盾．

定理 4[1]　系统(1)完全能控的充分必要条件是，对某个正整数 N，有

$$\mathrm{Span}U_N\supseteq\mathrm{Span}A^N\tag{11}$$

其中 $\mathrm{Span}M$ 表示由矩阵 M 的列向量张成的子空间．

证　设对某个正整数 N，式(11)成立．则对任给的 $x^0\in R^n$，有

$$\mathrm{rank}U_N=\mathrm{rank}[U_N,-A^Nx^0],\tag{12}$$

从而，方程

$$-A^N x^0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} B u(k) = U_N \begin{bmatrix} u(N-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \tag{13}$$

有解．故由 $x^0 \in R^n$ 的任意性，可知系统(1)完全能控．反之，设系统(1)完全能控，则由定理2可知，存在正整数 N，使对任给的 $x(0)=x^0 \in R^n$，方程(13)有解，从而式(12)成立，于是由 x^0 的任意性可知式(11)成立．

推论1 若系统(1)完全能达，则系统(1)完全能控．

证 由定理3可知，系统(1)完全能达时，存在正整数 N，使得 $\mathrm{rank}U_N=n$，从而有

$$\mathrm{Span}U_N = R^n \supseteq \mathrm{Span}[A^n],$$

故由定理4知，系统(1)完全能控．

推论2 A 可逆时，系统(1)完全能达与完全能控等价．

证 推论1已证，系统(1)完全能达必有系统(1)完全能控．下面证明，A 可逆且系统(1)完全能控时，系统(1)完全能达．

由定理4可知，存在正整数 N，使有 $\mathrm{Span}U_N \supseteq \mathrm{Span}[A^n]=R^n$(因 A 可逆)，从而 $\mathrm{rank}U_N=n$，由定理3知，系统(1)完全能达．

3 结束语

本文对离散定常线性系统的能达性与能控性，证明了基本定理1和2，从而解决了离散系统能达性与能控性概念的不统一问题，并改进了能达性与能控性的基本判定定理的证明．显然，本文结果对正确理解与运用这两个概念是有益的．

参 考 文 献

1 王 翼．离散控制系统．北京：科学出版社，1987. 56～93

2 何关钰．线性控制系统理论．沈阳：辽宁人民出版社，1982. 179，213～216

A Note on Reachability and Controllability of a Discrete Time-Invariant Linear System

Gong Deen

(Dept. of Indust. and Com. Manag., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract In relation to the reachability and the controllability of a discrete time-invariant linear system, the author demomstrates the equivalence of their two definitions; and improves the proofs of their fundamental decision theorems.

Keywords reachability, controllability, discrete time-invariant linear system