

# 在复杂边值条件下非稳态肋片的传热研究\*

杨翔翔<sup>①</sup> 何宏舟黄启伦<sup>②</sup>

(①华侨大学化工与生化工程系,泉州 362011; ②美国堪萨斯州州立大学)

**摘要** 研究了变热特性参数,根部温度作周期性变化的肋片传热情况.应用摄动法求解控制微分方程,并且采用打靶法和叠加原理进行数值计算.所得结果,不但具有理论价值,而且对工程设计也有现实指导意义.

**关键词** 变热特性参数,摄动法,叠加原理

**分类号** TK 124

作为系列研究,前段我们曾讨论了梯形肋片肋根温度随时间作周期性变化时的传热情况,然而忽略了热特性参数变化对肋片传热带来的影响.在大多数工程实际中,肋片的导热系数是温度的函数,而与外界环境的对流换热系数则是肋片位置的函数.特别是对于非稳态传热的肋片,肋片中温度场的变化往往会导致导热系数有较大的波动<sup>[1]</sup>.因此,本文的研究将基于前文之上,把导热系数和换热系数随温度和位置变化的情况考虑进来,从而使研究的结果更接近于实际应用的模型,因而更具有现实指导意义.

## 1 分析

研究中作如下假定:

(1) 导热系数  $k$  是温度的线性函数,写成  $k = k_a \cdot [1 + \beta \cdot (T - T_a)]$ ;

(2) 换热系数  $h$  是肋片位置的函数,即  $h = h_b \cdot f(X)$ ;

(3) 肋根温度按余弦规律作周期性变化,  $T_b - T_{bm} = (T_{bm} - T_a) \cdot \epsilon \cdot \cos \omega \tau$ ;

(4) 肋片自由端为绝热条件,  $\frac{\partial T}{\partial X} = 0$ ;

(5) 一维传热,且不考虑辐射因素的影响.肋片为梯形截面,其几何尺寸如图1所示.

根据上述假定,其瞬态传热控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial X} [Y \cdot (1 + E\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X}] - N^2 f(X) \cdot \theta = Y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (1)$$

边界条件为

$$X = 0, \quad \theta = 1 + \epsilon \cos Bt,$$

$$X = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0.$$

\* 本文 1994-07-11 收到;福建省自然科学基金资助项目

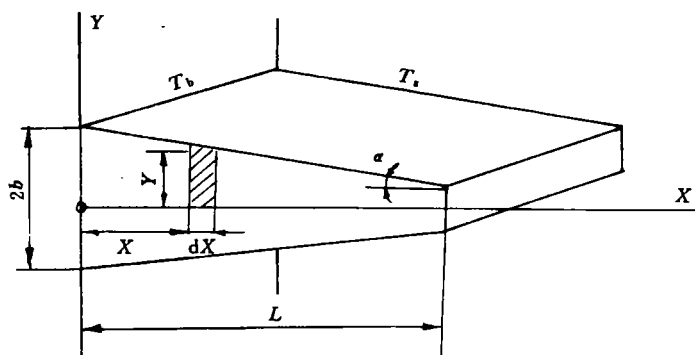


图1 梯形截面直肋传热示意图

## 2 求解

应用摄动法求解式(1). 由于  $\epsilon < 1$ , 可假定式(1)存在着形如式(2)的组合解

$$\theta(X, t) = \theta_0(X) + \epsilon^1 \cdot \theta_1(X, t) + \epsilon^2 \cdot \theta_2(X, t), \quad (2)$$

在实际应用中,  $\epsilon$  一般很少大于 0.2, 因此式(2)中可略去  $\epsilon$  的高阶项而不致于影响  $\theta(X, t)$  解的精度.

把式(2)代入式(1), 合并同类项, 整理后可得

$$\epsilon^0: \frac{d}{dX} [Y \cdot (1 + E\theta_0) \cdot \frac{d\theta_0}{dX}] - N^2 f(X) \cdot \theta_0 = 0, \quad (3)$$

$$X = 0, \theta_0 = 1; \quad X = 1, \theta_0 = 0,$$

$$\epsilon^1: \frac{\partial}{\partial X} [Y \cdot (\theta_1 + E\theta_0 \cdot \theta_1)'] - N^2 \cdot f(X) \cdot \theta_1 = Y \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial t}, \quad (4)$$

$$X = 0, \theta_1 = \cos Bt; \quad X = 1, \frac{\partial \theta_1}{\partial X} = 0,$$

$$\epsilon^2: \frac{\partial}{\partial X} [Y \cdot [E\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (\theta_2 + E\theta_0 \theta_2)]] - N^2 \cdot f(X) \cdot \theta_2 = Y \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial t}, \quad (5)$$

$$X = 0, \theta_2 = 0; \quad X = 1, \frac{\partial \theta_2}{\partial X} = 0,$$

下面来求解式(3)~(5).

首先, 求解式(3). 令

$$X_1 = \theta_0, \quad X_2 = Y \cdot (1 + E \cdot \theta_0) \cdot \frac{d\theta_0}{dX}, \quad (6)$$

则式(3)可化为

$$\frac{dX_1}{dX} = X_2 / [Y \cdot (1 + EX_1)] = f_1(X, X_1, X_2), \quad (7)$$

$$\frac{dX_2}{dX} = N^2 f(X) \cdot X_1, \quad (8)$$

和  $X = 0, X_1 = 1; \quad X = 1, X_2 = 0.$

于是,用 Runge-Kutta 积分法结合 Newton-Raphson 打靶法求解式(7~8),便可得到  $\theta_0(X)$  在每一个离散点  $X_i$  上的解.

其次,求解式(4). 由于式(4)含有  $\cos Bt$  项,不妨设  $\theta_1(X, t)$  有形如

$$\theta_1 = \text{Real}[\varphi(X)\exp(iBt)] \quad (9)$$

的复函数解,其中  $\text{Real}[\quad]$  代表解的实部.

应用叠加原理<sup>[2]</sup>和 Runge-Kutta 积分方法<sup>[3]</sup>进行求解,求解过程是互相钳套的. 又由于 Runge-Kutta 积分法是一步求解得到结果的,所以,求解过程又是非迭代的. 最后得式(4)的解为

$$\theta_1(X, t) = \varphi_1 \cos Bt - \varphi_2 \sin Bt. \quad (10)$$

最后,求解式(5). 由于式(5)中含有  $\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X}$  项,由式(10),有

$$\theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X} = A_1(X) + A_2(X) \cos 2Bt - A_3(X) \sin 2Bt. \quad (11)$$

考察式(11)发现,它是由一稳态项  $A_1(X)$  和一波动项  $[A_2(X) \cos 2Bt - A_3(X) \sin 2Bt]$  叠加起来的,联系式(10)不难猜想到  $\theta_2(X, t)$  应有形如式(12)的解,即

$$\theta_2(X, t) = \psi_0(X) + \psi_1(X) \cos 2Bt - \psi_2(X) \sin 2Bt. \quad (12)$$

应用叠加原理,采用与前面完全相似的步骤进行求解. 这样,  $\theta_2(X, t)$  的解可由式(12)确定. 最后,由式(2)可得到沿肋片轴向的温度分布关系式为

$$\begin{aligned} \theta(X, t) = & \theta_0(X) + (\varphi_1 \cos Bt - \varphi_2 \sin Bt) \epsilon^1 + \psi_0(X) \epsilon^2 \\ & + (\psi_1 \cos 2Bt - \psi_2 \sin 2Bt) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

### 3 结果与讨论

#### 3.1 温度分布

数值计算结果表明,如果肋片材料的导热系数随温度的增加而增大,则引起肋片上各点的温度时间平均值增大. 但是,由于温度平均值的大小主要是由  $\theta_0(X)$  决定的,而  $\theta_0(X)$  的求解受  $N$  值的影响远甚于受  $E$  值的影响;故对于一定  $N$  值而言,  $E$  值的变化对温度平均值的影响幅度并不大. 为了更好地解释  $k$  和  $h$  变化对温度分布造成的影响,图 2 给出了在  $N=1.0, B=1.0$  和  $\epsilon=0.1$  的情况下肋片上几个点的温度-时间关系曲线.

#### 3.2 热流率

图 3 给出了在  $N=0.5, f(X)=\exp(X)$  和  $B=5.0$  情况下,  $E$  变化对  $Q$  的影响. 随着  $N$  值的增大,  $E$  值变化对  $Q$  影响变得明显. 对于导热系数随温度增加而增大的肋片,其向外排热量要较其它情况为大.

#### 3.3 肋效率

由于平均肋效率是衡量肋片传热效果好坏的更有意义的参量,因此本文仅讨论平均肋效率受肋根温度波动的影响. 根据定义可知,  $\bar{\eta}$  值同时受参数  $N, B, E, \epsilon$  及函数关系  $f(X)$  的制约.

图 4 给出了参数  $N, \epsilon, E$  同时变化时对  $\bar{\eta}$  的影响,可以看出,采用导热系数随温度升高而增大的材料制成的肋片能够改善肋片的散热性能.

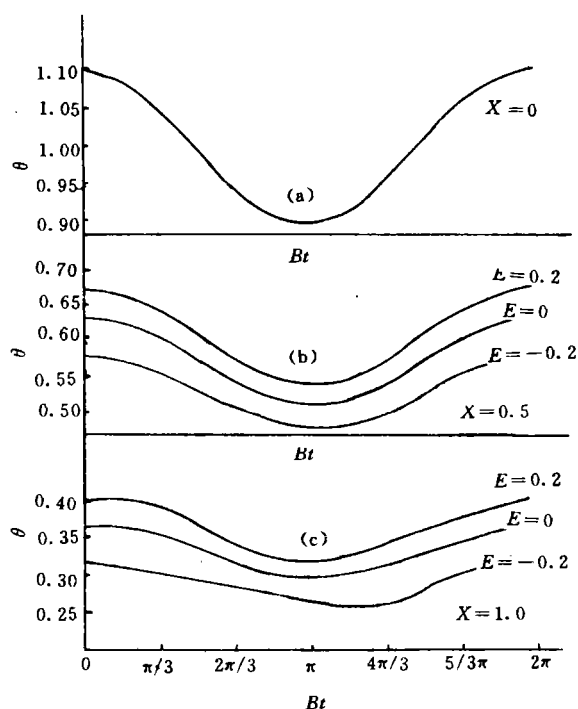


图2 肋片温度-时间关系

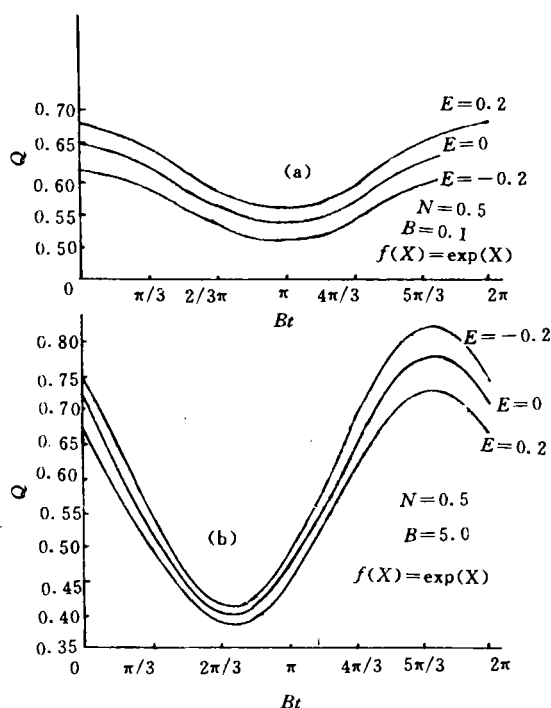


图3 肋片热流率-时间关系

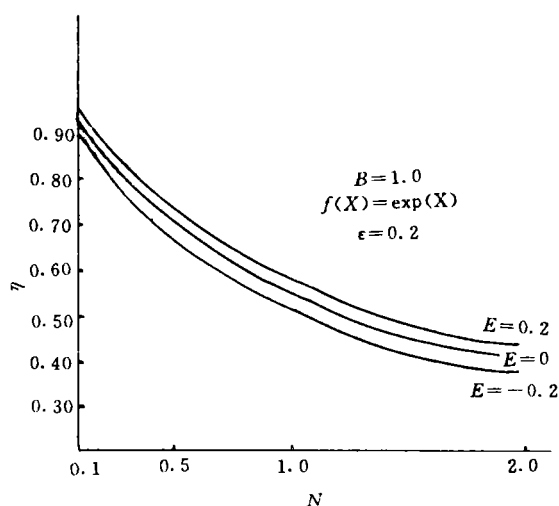
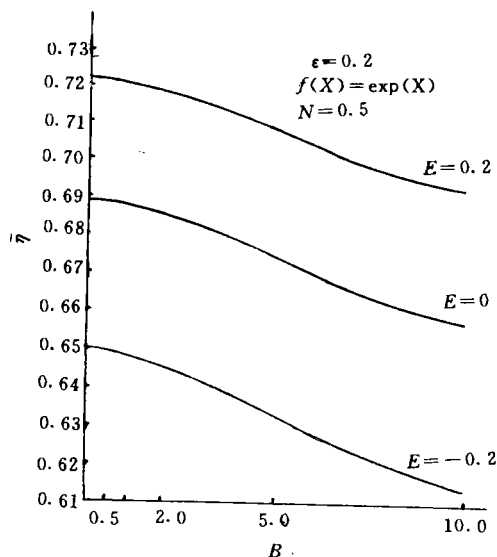
图4  $N, \epsilon, E$  变化对  $\bar{\eta}$  的影响图5  $B, \epsilon, E$  变化对  $\bar{\eta}$  的影响

图5给出了当  $N=0.5$  时的情况。这时  $B$  与  $\epsilon$  变化对  $\bar{\eta}$  的影响变得较为明显。 $\bar{\eta}$  值随  $B$  值增大而减小,当  $\epsilon$  较大时, $\bar{\eta}$  值随  $B$  值增大而下降得更为迅速。

文中符号分别表示: $a$  为热扩散率,  $k_s/\rho c$ ;  $B$  为肋片温度波动的频率参数,  $\rho c \omega L^2/k_s$ ;  $b$  为

肋根半厚度;  $c$  为肋片材料的热容;  $E$  为导热系数参数,  $\beta(T_{bm} - T_a)$ ;  $f(X)$  为对流换热系数  $h$  所依赖的函数;  $h$  为对流换热系数;  $h_b$  为肋根处的对流换热系数;  $k$  为肋片的导热系数;  $k_a$  为肋片在环境温度下的导热系数;  $L$  为肋高;  $N$  为肋片传热的特性参数,  $(h_b L^2 / k_a \cdot b \cos \alpha)^{1/2}$ ;  $T$  为肋片温度场温度;  $T_a$  为环境温度;  $T_b$  为肋根温度;  $T_{bm}$  为肋根温度平均量;  $t$  为无量纲时间参数,  $a\tau / L^2$ ;  $X$  为无量纲轴向距离,  $x/L$ ;  $x$  为轴向距离;  $Y$  为无量纲肋片厚度  $y/b$ ;  $y$  为肋片厚度;  $\alpha$  为梯形肋片倾角;  $\tau$  为时间变量;  $\rho$  为肋片材料密度;  $\epsilon$  为温度波动的幅度参数;  $\beta$  为导热系数随温度变化的关系系数;  $\omega$  为肋根温度的波动频率;  $\bar{\eta}$  为肋片一个周期中的平均肋效率;  $\theta$  为无量纲温度,  $(T - T_a) / (T_{bm} - T_a)$ ;  $\theta_0$  为零阶近似量;  $\theta_1$  为一阶近似量;  $\theta_2$  为二阶近似量;  $\phi$  为关于  $X$  的复函数;  $\phi_1$  为  $\phi$  的实部;  $\phi_2$  为  $\phi$  的虚部。

## 4 结 论

当热特性参数变化时,肋片的传热效果受四个参数即  $N$ ,  $B$ ,  $\epsilon$  和  $E$  和一个函数  $f(X)$  的控制。参数  $B$  是引起波动的主要因素。在变热特性参数情况下,参数  $N$  对波动的抑制效果受到削弱。

与定热特性参数的传热情况相比,对流换热系数的变化在一定程度上增强了传热效果。对于导热系数随温度增加而增大的肋片,其传热效果也得到增强;对于导热系数随温度增加而减小的肋片,其传热效果受到减弱。

## 参 考 文 献

- 1 Aziz A, Na T Y. Periodic heat-transfer in fins with variable thermal parameters. J. Heat. & Mass. Transfer, 1981, 24(8): 1397~1404
- 2 Na T Y. Computational methods in engineering boundary value problems. New York: Academic Press, 1979. 13~28
- 3 Jain M K. Numerical solution of differential equations. New York: Halsted Press, 1979. 77~81

## A Study of Unsteady-State Finned Heat Transfer under Complex Boundary Value Condition

Yang Xiangxiang<sup>①</sup> He Hongzhou C. L. D. Huang<sup>②</sup>

(<sup>①</sup> Dept. of Chem. & Biochem. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou; <sup>②</sup> Kansas State Univ., USA)

**Abstract** A study is made on the heat transfer of a trapezoidal fin with variable thermal parameters and periodic change of fin base temperature. The control differential equation is solved by applying perturbation method, and the numerical calculation is performed by adopting shooting method and the method of superposition. In addition to theoretical significance, the results are of practical significance for engineering design.

**Keywords** variable thermal parameter, perturbation method, method of superposition