第16卷 第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol.16 No.2
1995年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 1995

用解析法求解空间周转轮系中行星轮转速*

唐　林

(华侨大学精密机械工程系,泉州 362011)

摘要　利用周转轮系的转化机构推导出空间周转轮系行星轮转速计算公式,并阐述行星轮转向的判定方法.

关键词　行星轮,转化机构,转速

分类号　TH 123.1

在含有轴线不平行齿轮(如圆锥齿轮)的空间周转轮系中,回转轴线相互平行的各构件间的传动比、转速和转动方向可用转化机构法确定. 对轴线不平行构件的转速,则需通过转速矢量图解的方法确定该类构件的转速和转动方向. 转速矢量图解法求解精度取决于所作的机构简图和转速矢量图的精度,而且在测量转速矢量图尺寸时亦会产生测量和读数误差,因而难以获得准确的转速值. 绘制机构简图时,需知各构件的尺寸及相对位置角度,比较麻烦. 为此提出利用周转轮系的转化机构,采用解析法求解周转轮系中回转轴线不平行构件的转速和转向.

1　空间周转轮系中各构件转速的计算

图1是由圆锥齿轮1,2,3及转臂H组成的最基本的空间周转轮系. 设 n_1,n_3,n_2 及 n_H 分别为中心轮1,3、行星轮2及转臂H在周转轮系中的绝对转速值;α 为行星轮轴线与转臂H回转轴线间的夹角;Z_1,Z_2,Z_3 分别为齿轮1,2,3的齿数.

因中心轮1,3及转臂H三者的回转轴线平行,故可由转化机构法求得 n_1,n_3,n_H 三者间的转速关系式为

$$\frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = -\frac{Z_3}{Z_1}, \tag{1}$$

若已知 n_1,n_3,n_H 三者中任意两者的大小及转向,则可由式(1)求得另一构件的转速和转向.

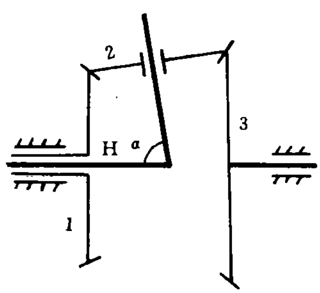

图1　周转轮系

1.1　行星轮的转速分析

对于行星轮2,由于其轴线与转臂H及两个中心轮的回转轴线间存在着夹角 α,故不能直接应用转化机构法的计算式求解行星轮2的转速 n_2. 行星轮2的运动可看成是下述两个简单

* 本文1994-07-13收到

运动的复合:(1)行星轮绕自身轴线的转动,设行星轮 2 相对于转臂 H 的相对转速为 n_2^H.(2)转臂 H 绕自身回转轴线的转动,设转速为 n_H. 由速度合成定理知,行星轮 2 的绝对转速矢量 $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}_2^H+\boldsymbol{n}_H$,若 $\boldsymbol{n}_2^H$,$\boldsymbol{n}_H$ 的大小和方向能够确定,则可求得行星轮 2 的转速 $\boldsymbol{n}_2$ 大小及其转向. $\boldsymbol{n}_H$ 的大小和方向可由转化机构法的速度关系式求得,$\boldsymbol{n}_2^H$ 也可利用转化机构进行求解.

1.2　行星轮相对于转臂的转速 n_2^H 计算及转向判断

由于周转轮系的转化机构是通过给整个轮系附加一转速"$-n_H$"获得的,因此各构件间的相对运动关系在周转轮系和转化机构(是一个定轴轮系,见图 2)中完全相同. 用下述符号表示转化机构中各构件的转速值,即 n_1^H 为中心轮 1 的转速($n_1^H=n_1-n_H$);n_3^H 为中心轮 3 的转速($n_3^H=n_3-n_H$);n_H^H 为臂 H 的转速($n_H^H=n_H-n_H=0$);n_2^H 为行星轮 2 的转速. 因为转化机构中转臂 H 的转速 $n_H^H=0$,行星轮 2 的转速 n_2^H 实际上就是行星轮 2 相对于转臂 H 的相对转速. 若已知 n_1 和 n_H,则由式 $n_1^H/n_2^H=(n_1-n_H)/n_2^H=Z_2/Z_1$ 可求得 $n_2^H=(n_1-n_H)Z_1/Z_2$. 利用该式求解时应注意:当 n_1,n_H 的转向与所规定的正向相反时,应将负值代入进行计算. 由于行星轮 2 的轴线与中心轮 1 及转臂 H 的轴线不平行,故当 n_2^H 为负值时,其负号并不能表示行星轮 2 在转化机构中的转向. 为避免误解,取计算值的绝对值作为 n_2^H 的数值,即 $n_2^H=\dfrac{Z_1}{Z_2}|n_1-n_H|$. 利用转速 n_3 进行求解时,同理可推得 $n_2^H=\dfrac{Z_3}{Z_2}|n_3-n_H|$.

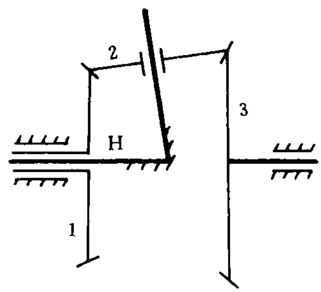

图 2　转化机构

转化机构中行星轮 2 的转向只能用图示法在转化机构中示出,通过转化机构中齿轮 1 或 3 的转向(即通过 n_1^H、n_3^H 的转动方向)确定齿轮 2(n_2^H)的转动方向. 要正确判断出 n_2^H 的转动方向,首先需正确确定转化机构中齿轮 1 或齿轮 3 的转向. 若周转轮系的中心轮 1 和转臂 H 的转速 n_1,n_H 大小及其转向均已知,则转化机构中齿轮 1 的转速 $n_1^H=n_1-n_H$ 的转向就可确定. 若取周转轮系中齿轮 1 的转向为正向,即取 n_1 为正值,则当 $n_1^H=n_1-n_H>0$ 时,说明转化机构中齿轮 1 的转向与周转轮系中齿轮 1 的转向相同;若 $n_1^H=n_1-n_H<0$,则转化机构中齿轮 1 的转向与周转轮系中齿轮 1 的转向相反. 在此需特别注意的是:当 n_H 的转向与 n_1 的转向相反时,应以 $-n_H$ 代入式中进行计算,即此时 $n_1^H=n_1-(-n_H)$. n_1^H 实际上就是齿轮 1 相对于转臂 H 的转速,上述结论完全符合相对运动原理. 在转化机构中,判断出齿轮 1 的转向后,便可用图示法确定行星轮 2(n_2^H)的转向. 由 n_3^H 转向亦可确定 n_2^H 的转向,方法与上述类同.

1.3　行星轮的绝对转速 $\boldsymbol{n}_2$ 计算及转向判断

构件的转速可用沿其回转轴线的转速矢量表示,转速矢量的方向由右手定则确定. 即右手握住构件的回转轴线,四指自然弯曲方向代表构件的转动方向,大拇指所指方向即为构件的转速矢量方向. 由此可知,转速矢量 $\boldsymbol{n}_2^H$ 沿行星轮 2 的轴线,$\boldsymbol{n}_2^H$ 的方向根据 $\boldsymbol{n}_2^H$ 的转向由右手定则确定. 转速矢量 $\boldsymbol{n}_2^H$ 的方向对 $\boldsymbol{n}_2$ 的计算和方向判断有直接影响,在 $\boldsymbol{n}_H$ 的大小和方向已知,$\boldsymbol{n}_2^H$ 大小不变的情形下,当 $\boldsymbol{n}_2^H$ 的矢量方向改变时,所对应的 $\boldsymbol{n}_2$ 有截然不同的大小和方向(见图 3). 故正确地判断转化机构中齿轮 2 的转向是获得正确的转速矢量 $\boldsymbol{n}_2$ 的关键.

转速矢量 $\boldsymbol{n}_H$ 和 $\boldsymbol{n}_2^H$ 的大小和方向确定后,$\boldsymbol{n}_2$ 的大小和方向便可由转速矢量三角形确定. 由图 3 可见,在 $\boldsymbol{n}_H$,$\boldsymbol{n}_2^H$,$\boldsymbol{n}_2$ 所组成的矢量三角形中,$\boldsymbol{n}_2$ 所对应的角度只有两种可能性:

（1）$\boldsymbol{n}_2$ 所对应的角度为 $180°-\alpha$（图3a），此时 $\boldsymbol{n}_2$ 的大小为

$$n_2=\sqrt{(n_2^{\mathrm{H}})^2+(n_{\mathrm{H}})^2+2|n_2^{\mathrm{H}}||n_{\mathrm{H}}|\cos\alpha}\,. \tag{2}$$

（2）$\boldsymbol{n}_2$ 所对应的角度为 α（图3b），此时 $\boldsymbol{n}_2$ 的大小为

$$n_2=\sqrt{(n_2^{\mathrm{H}})^2+(n_{\mathrm{H}})^2-2|n_2^{\mathrm{H}}||n_{\mathrm{H}}|\cos\alpha}\,. \tag{3}$$

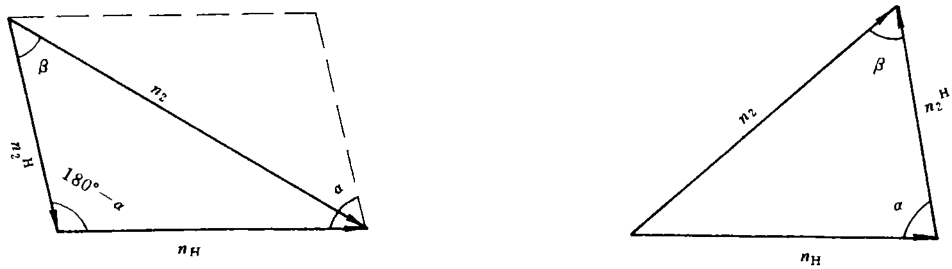

图3　转速矢量图

在(1)，(2)两种情形下，由正弦定理可求得 $\boldsymbol{n}_2$ 的矢量方向线与行星轮2轴线间的夹角 β 为

$$\beta=\arcsin\left(\frac{|n_{\mathrm{H}}|}{|n_2|}\cdot\sin\alpha\right). \tag{4}$$

由于 $\boldsymbol{n}_2$ 的矢量方向线也正是行星轮2的瞬时回转轴线，故 β 即为行星轮2的瞬时回转轴线与行星轮2轴线间的夹角．

下面讨论两种特殊情形下行星轮2的转速 $\boldsymbol{n}_2$：

（1）$\alpha=90°$，即行星轮轴线与转臂回转轴线垂直时，由式(2)（或式(3)）及式(4)可得 $n_2=\sqrt{(n_2^{\mathrm{H}})^2+(n_{\mathrm{H}})^2}$，$\beta=\arcsin\left(\frac{|n_{\mathrm{H}}|}{|n_2|}\right)$．

（2）$\alpha=0°$，即行星轮轴线与转臂回转轴线平行时．若 n_2^{H} 与 n_{H} 转向相同，从图3a及式(2)可知，n_2 与 n_{H} 转向相同，且 $n_2=n_2^{\mathrm{H}}+n_{\mathrm{H}}$，即 $n_2^{\mathrm{H}}=n_2-n_{\mathrm{H}}$．若 n_2^{H} 与 n_{H} 转向相反，从图3b及式(3)知，当 $n_2^{\mathrm{H}}>n_{\mathrm{H}}$ 时，n_2 转向与 n_2^{H} 相同，与 n_{H} 转向相反，且 $n_2=n_2^{\mathrm{H}}-n_{\mathrm{H}}$，即 $n_2^{\mathrm{H}}=n_2+n_{\mathrm{H}}$；当 $n_2^{\mathrm{H}}<n_{\mathrm{H}}$ 时，n_2 的转向与 n_{H} 相同，$n_2=n_{\mathrm{H}}-n_2^{\mathrm{H}}$，即 $n_2^{\mathrm{H}}=n_{\mathrm{H}}-n_2$．在 $\alpha=0°$ 的三种情形下，由式(4)均可求得 $\beta=0°$．这说明行星轮的瞬时回转轴线就是其本身轴线，针对 $\alpha=0°$ 的三种情形下所得转速值 n_2^{H} 的计算结果与采用转化机构法求解所得的完全相同．

2　结论

由上述分析可得出如下结论：(1)在由圆锥齿轮组成的空间周转轮系中，轴线相互平行的各构件的转速和转向可用转化机构法所列的转速关系式（如式(1)）进行求解．(2)行星轮轴线与中心轮和转臂轴线不平行时，若以 $Z_{中}$，$Z_{行}$ 分别表示中心轮和行星轮的齿数；$n_{中}$，n_{H}、$n_{行}$ 分别表示中心轮、转臂H和行星轮在周转轮系中的绝对转速值；$n_{行}^{\mathrm{H}}$ 表示行星轮相对于转臂的相对转速值（即在转化机构中的转速值），则

$$n_{行}^{\mathrm{H}}=(n_{中}-n_{\mathrm{H}})Z_{中}/Z_{行}, \tag{5}$$

式(5)中的 $Z_{中}$，$n_{中}$ 应是同一中心轮的齿数和转速值．$\boldsymbol{n}_{行}^{\mathrm{H}}$ 的转向根据 $\boldsymbol{n}_{中}^{\mathrm{H}}$（中心轮在转化机构中的转速）的转向由图示法确定．当 $\boldsymbol{n}_{行}^{\mathrm{H}}$ 的大小和转向均确定后，再根据 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{n}_{行}^{\mathrm{H}}$ 及 $\boldsymbol{n}_{行}=\boldsymbol{n}_{\mathrm{H}}+\boldsymbol{n}_{行}^{\mathrm{H}}$ 作出转速矢量三角形的示意图（无需精确画出矢量值的大小）．若 $\boldsymbol{n}_{行}$ 在转速矢量三角形内所对应的角度为 $(180°-\alpha)$（图 3a 所示），则

$$n_{行}=\sqrt{(n_{行}^{\mathrm{H}})^2+(n_{\mathrm{H}})^2+2|n_{行}^{\mathrm{H}}||n_{\mathrm{H}}|\cos\alpha}, \tag{6}$$

若 $\boldsymbol{n}_{行}$ 在转速矢量三角形内所对应的角度为 α（图 3b 所示），则

$$n_{行}=\sqrt{(n_{行}^{\mathrm{H}})^2+(n_{\mathrm{H}})^2-2|n_{行}^{\mathrm{H}}||n_{\mathrm{H}}|\cos\alpha}, \tag{7}$$

由转速矢量三角形中 $\boldsymbol{n}_{行}$ 的矢量方向线及右手定则便可确定行星轮的转动方向．行星轮的瞬时回转轴线与行星轮轴线间的夹角 β 为

$$\beta=\arcsin\left(\frac{n_{\mathrm{H}}}{n_{行}}\sin\alpha\right). \tag{8}$$

现举例说明本文所得结论的应用．图 4 是由齿轮 1，2′，2，3 及转臂 H 组成的差速器．各齿轮的齿数分别为 $Z_1=21$，$Z_{2'}=18$，$Z_2=42$，$Z_3=48$，行星轮轴线与转臂回转轴线间的夹角为 60°．已知齿轮 1 及 3 的转速分别为 $n_1=80\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$，$n_3=100\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$，若规定齿轮 1 转速 n_1 的转向为正向，则由周转轮系转化机构法可得

$$\frac{n_1-n_{\mathrm{H}}}{n_3-n_{\mathrm{H}}}=\frac{80-n_{\mathrm{H}}}{-100-n_{\mathrm{H}}}=-\frac{Z_{2'}\cdot Z_3}{Z_1\cdot Z_2}=-\frac{18\cdot 48}{21\cdot 42}=-\frac{48}{49}.$$

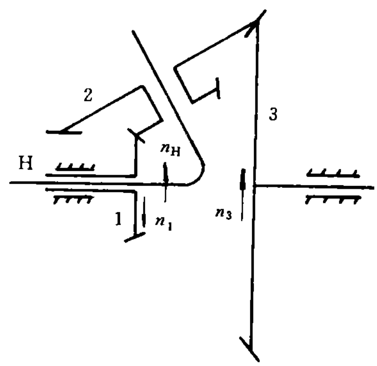

图 4 差速器

由此解得 $n_{\mathrm{H}}=-880/97$，"－"说明 n_{H} 转向与 n_1 转向相反．由式(5)可求得行星轮相对于转臂的转速为 $n_2^{\mathrm{H}}=n_{2'}^{\mathrm{H}}=(n_1-n_{\mathrm{H}})Z_1/Z_2'=[80-(-880/97)]21/18=10\,080/97$，由于 $n_1^{\mathrm{H}}=n_1-n_{\mathrm{H}}=80-(-880/97)=8\,640/97>0$，说明转化机构中齿轮 1 转速 $\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{H}}$ 的转向与周转轮系中齿轮 1 转向相同，根据 $\boldsymbol{n}_1^{\mathrm{H}}$ 的转向便可由图示法在转化机构中定出 $\boldsymbol{n}_2^{\mathrm{H}}$ 的转向．根据矢量关系 $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}_{\mathrm{H}}+\boldsymbol{n}_2^{\mathrm{H}}$，由 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{n}_2^{\mathrm{H}}$ 及 $\boldsymbol{n}_2$ 组成的转速矢量三角形（图 5）．便可确定行星轮的转速大小及转向．由式(6)得

$$\begin{aligned}n_2&=\sqrt{(n_2^{\mathrm{H}})^2+(n_{\mathrm{H}})^2+2|n_2^{\mathrm{H}}||n_{\mathrm{H}}|\cos 60°}\\&=\sqrt{(10\,080/97)^2+(880/97)^2+2|10\,080/97|\cdot|880/97|\cdot\cos 60°}\\&=(10\,547.568)/97\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}.\end{aligned}$$

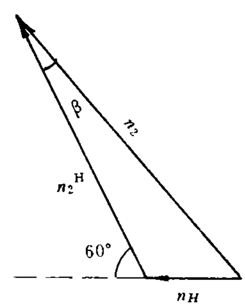

图 5 转速矢量图

行星轮的瞬时回转轴线与其轴心线间的夹角 β 可由式(8)求得 $\beta=\arcsin\left(\frac{|n_{\mathrm{H}}|}{|n_2|}\cdot\sin 60°\right)=\arcsin\left(\frac{880}{10\,547.57}\cdot\sin 60°\right)=4.15°$．由整个计算过程可见，当明确 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{H}}$ 及 $\boldsymbol{n}_2^{\mathrm{H}}$ 的转向后，只需定性地作出转速矢量图，便可精确地求得行星轮 2 的转速大小及转动方向．利用中心轮 3 的转速 n_3 求解也得出完全相同的结论．

3 结束语

本文以空间周转轮系的基本形式(图1)为例,利用周转轮系的转化机构推导出轴线与中心轮和转臂轴线不平行的行星轮转速计算的有关公式,阐述了行星轮转动方向判断的方法.推导过程通俗易懂,结果精确,不需按比例绘制机构简图和转速矢量图.所推得的有关行星轮转速的计算式(5),(6),(7)及(8)实际上是周转轮系中行星轮转速计算的推广形式,它们也适用于差动轮系、行星轮系、齿轮轴线相交的空间周转轮系和齿轮轴线相互平行的平面周转轮系.

参 考 文 献

1 马从谦,陈自修,张文照等.渐开线行星齿轮传动设计.北京:机构工业出版社,1987.80～84

To Solve the Rotating Speed of Planetary Gear in Space Turnover Gear Trains

Tang Lin

(Dept. of Precis. Mech. Eng. ,Huaqiao Univ. ,362011,Quanzhou)

Abstract For calculating the rotating speed of planetary gear in space turnover gear trains,a formula is derived by applying the transforming mechanism of turnover gear trains. An exposition is made on the method for judging the steering of planetary gear.

Keywords planetary gear,transforming mechanism,rotating speed