

系统的分散与集中决策*

(IV) 控制目标函数的实现

王永初

(华侨大学系精密机械工程系, 泉州 362011)

摘要 揭示状态权矩阵与控制权函数的关系,以及这种关系对系统品质的影响,讨论了对应于三种不同扰动位置最优 Q 与 R 值的选择.

关键词 目标函数,权矩阵,扰动响应,最优函数值

分类号 TB 114.2

在最优控制理论中,总是围绕目标函数 $J(u, X) = J(X, \varphi(u))$, 选择一个 $u = u^*$, 使 $J(u, X) \rightarrow$ 最小. 最常见的目标函数是二次型, 即 $J(u, X)$ 可记为

$$J(u, X) = \int_0^t (XQX^T + uRu^T)dt, \quad (1)$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, Q 与 R 为权系数矩阵. 在系统的状态方程式 $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ 及输出方程式 $Y(t) = HX(t)$ 已知的情况下最优控制为 $u^* = -KX(t)$, 其中 $K = R^{-1}BM$, M 为黎卡提方程式 $A^T M + MA - MBR^{-1}B^T M + Q = 0$ 的解. 因此理论上关于二次型优化控制问题几乎已经解决. 其实不然, 权系数矩阵 Q 与 R 经常是假设的, 大多数设计者取 Q 与 R 为单位矩阵, 所以在 Q 与 R 的选择问题没有解决之前, 线性二次型优化控制问题还是没有解决, 这就是本文所要研究的问题. 生产的集中分散系统通过解耦将一个复杂的交互影响的多变量系统分解成层次化的相对独立的子系统. 当其上位系统按 SPC 原理分配各个子系统特征状态的权矩阵(或权系数)时, 涉及到 Q 与 R 的具体设置问题, 即既有给定值的最优响应又有对于克服各自子系统扰动的最优响应问题.

1 Q 与 R 权矩阵对系统响应的影响

系统设计经常以二阶系统为基础, 高阶系统亦经常采用补偿、降阶或简化成一个准二阶系统. 这里以一个二阶积分环节为对象的例子来说明. 其状态方程式为

$$\dot{X} = AX + Bu,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

* 本文 1994-11-01 收到; 福建省自然科学基金资助项目

并以损失函数

$$J(u, X) = \int_0^{\infty} (X^T Q X + u^T R u) dt \rightarrow \text{最小}, \quad (2)$$

为其控制目标. 在状态反馈下

$$U = -KX, \quad (3)$$

其中

$$K = R^{-1}B^T M, \quad (4)$$

M 为如下黎卡提方程式的解

$$A^T M + MA - MBR^{-1}B^T M + Q = 0, \quad (5)$$

这说明反馈矩阵的选择直接同权系数矩阵 R 及 Q 的选择有关, 若取

$$R = \gamma^2, \quad (6a)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}, \quad (6b)$$

将矩阵 A, B 及上述两式代入式(5), 解得

$$M = \begin{bmatrix} \gamma^{-2}\alpha_1 \sqrt{\alpha_2^2 + 2\gamma^{-1}\alpha_1} & \gamma^{-1}\alpha_1 \\ \gamma^{-1}\alpha_1 & \gamma \sqrt{\alpha_2^2 + 2\gamma^{-1}\alpha_1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

以及

$$K = \frac{1}{\gamma^2} [\gamma^{-1}\alpha_1, \gamma \sqrt{\alpha_2^2 + 2\gamma^{-1}\alpha_1}]. \quad (8)$$

式(8)说明 K 矩阵(这里为向量)的选择同权系数矩阵的取值关系十分密切. 例如当 $\gamma=1, \alpha_1=1, \alpha_2=0$ 时, $K=[1, \sqrt{2}]$; $\gamma=1, \alpha_1=\alpha_2=1$, 则有 $K=[1, \sqrt{3}]$; 当 $\gamma=2, \alpha_1=\alpha_2=1$, 则有 $K=[0.5, 0.280]$. 图 1 为上述三种不同 R 与 Q 值时的系统单位阶跃响应曲线.

显然, 不同的权系数对优化系统的品质有重大影响.

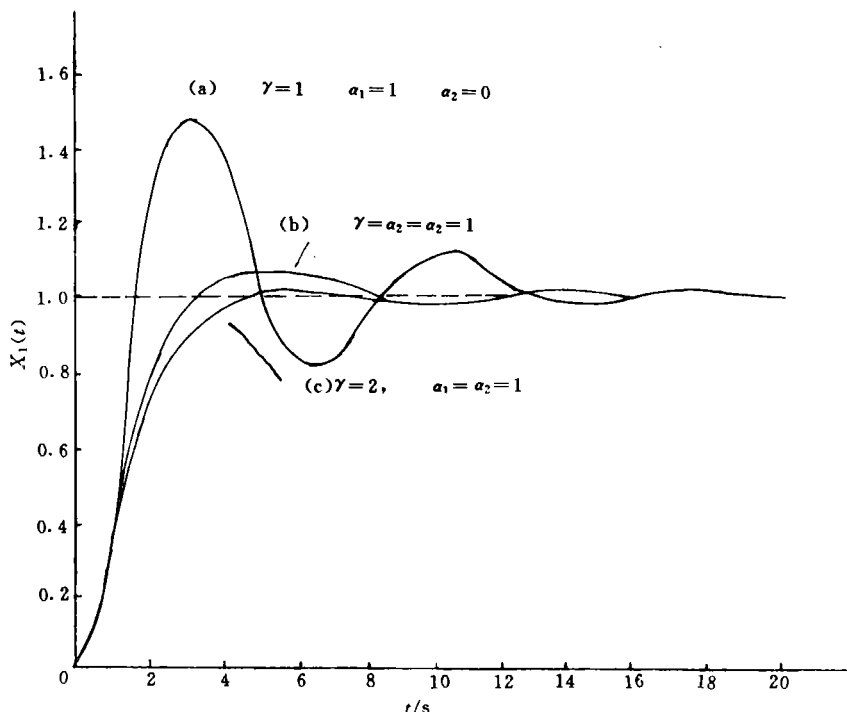
2 过程系统 Q 与 R 的选择

美国学者 Van, Loan, C. F. 与 Whitbek, R. F. 曾指出权系数矩阵(或权系数)的选择对控制系统有重大的影响. Franklin 在“Digital Control of Dynamic Systems”一书也提出按设计需要选择. 大多数文献的研究也是针对随动系统, 几乎没有涉及生产过程广泛应用的定值与外扰系统. 例如 Franklin 就选择

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

这实际上只对位置误差(或一次状态 x_1)加权, 而对其他类型的误差或其他状态没有加权处理.

作者认为系统既然是闭环反馈控制系统, R 的选择必然会通过系统反馈影响 Q 的选择. 这是因为 $u = -KX$, 其中 K 又是 Q 与 R 的函数即 $u = -K(Q, R)X$, 当 R 取标量 γ 时, 式(1)可写成

图1 R 与 Q 不同取值对 $X_1(t)$ 响应的比较

$$J(u, X) = \int_0^{t_s} \{XQX^T\gamma + XQ_1X^T\} dt = \int_0^{t_s} X\tilde{Q}X^T dt, \quad (10)$$

其中

$$Q_1 = \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1k_2 & \cdots & k_1k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_2k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_nk_1 & k_nk_2 & \cdots & k_n^2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q} = Q + \gamma Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1k_2 & \cdots & k_1k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_2k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_nk_1 & k_nk_2 & \cdots & k_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{11} + \gamma k_1^2 & \gamma k_1k_2 & \cdots & \gamma k_1k_n \\ \gamma k_2k_1 & Q_{22} + \gamma k_2^2 & \cdots & \gamma k_2k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma k_nk_1 & \gamma k_nk_2 & \cdots & Q_{nn} + \gamma k_n^2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

当 γ 为一个较小的数时, \tilde{Q} 可以近似于 Q , 即

$$\tilde{Q} \approx Q, \quad \gamma \ll \sum_{i=1}^n Q_{ii}, \quad (12)$$

只有在这种情况下, 系统设计者所选择的 Q 矩阵的各个元素, 才能真正表示 Q_{ii} 授予各状态的决定权。例如对象特性

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad (13)$$

写成状态方程式为

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (14)$$

并取

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

代入式(5)的黎卡提方程式,可以求得 M 矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sqrt{\alpha_2^2 + 2\gamma\alpha_1} & \gamma\alpha_1 \\ \gamma\alpha_1 & -\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + \gamma^2(\alpha_2^2 + 2\gamma\alpha_1)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(14)代入式(4)求得

$$\begin{aligned} K &= R^{-1}BM = [\gamma^{-2}M_{12}, \gamma^{-2}M_{22}] \\ &= [\gamma^{-1}\alpha_1, -1 + \sqrt{1 + \gamma^{-2}(\alpha_2^2 + 2\gamma\alpha_1)}] = [k_1, k_2]. \end{aligned} \quad (16)$$

根据系统的闭环特征方程式

$$\det[sI - A + BK] = s^2 + s(1 + k_2) + k_1 = 0, \quad (17)$$

求得系统的无阻尼波动度

$$\xi = \frac{1 + k_2}{2\sqrt{k_1}} = \frac{\gamma\sqrt{\gamma^2 + (\alpha_2^2 + 2\gamma\alpha_1)}}{2\sqrt{\gamma\alpha_1}}, \quad (18)$$

表 1 列 ξ 同 γ 及 α_1, α_2 关系的一组数据.

表 1 ξ 与 γ, α_1 及 α_2 的一组数据

γ	α_1	α_2	ξ	γ	α_1	α_2	ξ	γ	α_1	α_2	ξ	γ	α_1	α_2	ξ
1	1	1	1.000 0	0.8	0.5	1	0.987 9	0.3	1	0.5	0.265 5	0.2	0	0.5	∞
1	1	0.5	0.901 4	0.8	0	0.5	∞	0.3	1	0	0.252 5	0.1	1	1	0.173 9
1	1	0	0.866 0	0.5	1	1	0.637 4	0.3	0.5	1	0.456 6	0.1	1	0.5	0.107 2
1	0.5	1	2.449 9	0.5	1	0.5	0.433 0	0.3	0	0.5	∞	0.1	1	0	0.72 5
1	0	0.5	∞	0.5	1	0	0.395 3	0.2	1	1	0.268 3	0.1	0.5	1	0.235 6
0.8	1	1	0.805 0	0.5	0.5	1	0.661 4	0.2	1	0.5	0.185 7	0.1	0	0.5	∞
0.8	1	0.5	0.705 7	0.5	0	0.5	∞	0.2	1	0	0.148 3				
0.8	1	0	0.669 7	0.3	1	1	0.356 0	0.2	0.5	1	0.352 2				

由于随动系统与定值系统的最优无阻尼波动度是不同的,定值系统 $\xi \approx 0.159 \sim 0.318^{[1]}$, 而随动系统的 $\xi = 0.707$. 因此这两类系统的 Q 与 R 选择是有区别的. 随动系统的 γ 值记为 γ_s , 定值系统的 γ 值记为 γ_s , 则 $\gamma_s \approx \frac{1}{4}\gamma_s$. 于是 Q 与 R 元素的选择可归纳为:

- (1) 为保证闭环反馈不影响各个状态的权值, γ 应小于 $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2$;
- (2) 定值系统的 γ_s 值应比随动系统的 γ_s 值小几倍;
- (3) 对二阶系统的言, α_1 应大于 α_2 值. 对于几维系统, α_1 值应大于所有其他的 α_i 值, $i=2$,

$3, \dots, n$. α_i 值取决于系统的干扰位置.

3 扰动位置不确定系统的 Q 与 R 选择

具有扰动输入 ($f_i, i=1, 2, \dots, n$) 与给定值输入 ($X_i^*, i=1, 2, \dots, n$) 的状态反馈控制系统, 其结构如图 2 所示.

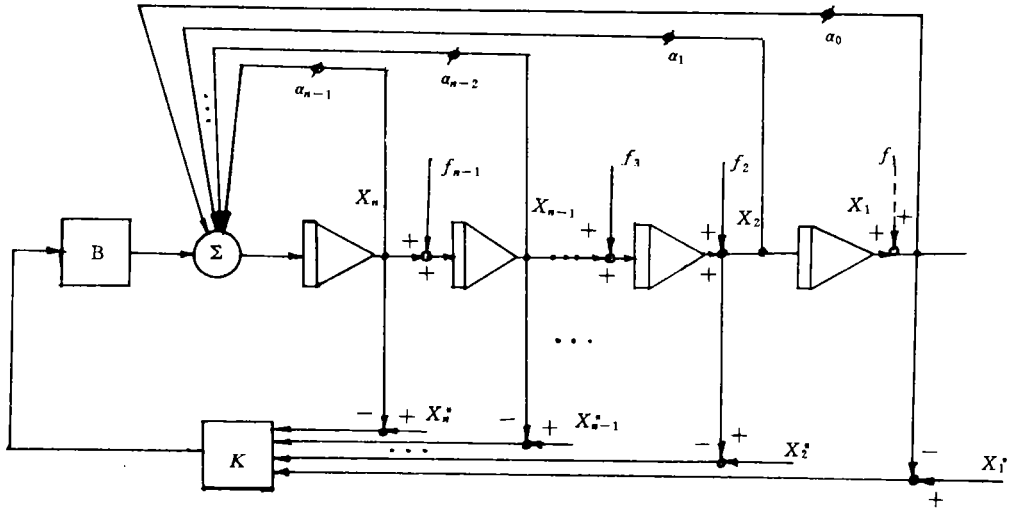


图 2 具有扰动与状态给定输入的状态反馈系统结构图

当一个系统的扰动 (f_i) 位置确定时, Q 矩阵中相对应的 α_i 权值应取得比其他 $\alpha_i (i=2, 3, \dots, n)$ 的权值更大. 但是对许多生产过程控制系统而言 f_i 的位置难于确定, 或者说模糊不清. 这种场合下, 设计者就很难凭经验并结合上节归纳的原则来选择 Q 与 R . 在这种场合下, 我们推荐一种综合信号方法来确定 Q 与 R . 即

$$e(t) \triangleq \bar{X}(t) = C_1 \bar{X}_1(t) + C_2 \bar{X}_2(t) + \dots + C_n \bar{X}_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \bar{X}_i(t), \quad (19)$$

其中 \bar{X}_1 表示为 f_1 或 X_1^* 给定值扰动引起的系统误差脉冲响应 $\bar{X}_i (i=2, 3, \dots, n)$ 表示多 $f_i (i=2, 3, \dots, n)$ 位置引起的系统误差的脉冲响应, $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 分别表示信号有关部份的加权系数. 由于 \bar{X}_i 与 $\bar{X}_j, i \neq j$ 具有统计无关的特性, 即 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \bar{X}_i(t) \bar{X}_j(t) dt = 0$ 故有

$$\begin{aligned} \bar{X}^2(t) &= \sum_{i=1}^n C_i^2 \bar{X}_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i C_j \bar{X}_i \bar{X}_j \\ &= \sum_{i=1}^n C_i^2 \bar{X}_i^2 = \bar{X} \bar{Q} \bar{X}^T, \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} C_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_2^2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n^2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

现以目标函数

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}^2(t) dt \rightarrow \text{最小}, \quad (22)$$

确定 \bar{Q} 矩阵的权系数. 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{X}(-s) \bar{X}(s) ds, \quad (23)$$

若记 X_1^* 或 f_1 至 x_1 的传递函数为

$$\frac{X_1(s)}{-X_1^*(s)} = \frac{X_1(s)}{f_1(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \triangleq \frac{1}{A_n(s)}, \quad (24)$$

由图 2 可以看出 $f_i (i=2, 3, \cdots, n)$ 位置的扰动可折算为 f_1 位置的扰动, 并有

$$f_i(s) = s^{i-1} f_1(s) \quad i = 2, 3, \cdots, n, \quad (25)$$

故有

$$\bar{X}(s) = \frac{C_n s^{n-1} + C_{n-1} s^{n-2} + \cdots + C_2 s + C_1}{A_n(s)}, \quad (26)$$

将式(25)代入式(23)并按 Parseval 积分可求出权系数 $C_i (i=1, 2, \cdots, n)$. 求解过程包括如下三个步骤:

- (1) 按闭环最优特征方程式确定 $A_n(s)$ 的系数;
- (2) 求出 Parseval 积分的 J 值表示式;
- (3) 按 $J \rightarrow \min$ 原则求出 $C_i (i=1, 2, \cdots, n)$.

例如二阶系统的最优闭环传递函数的特征方程式为

$$A_2(s) = s^2 + 1.414 2s + 1$$

于是 Parseval 积分为

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \bar{X}(s) \bar{X}(-s) ds$$

其中

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C_n(s)}{A_n(s)} \cdot \frac{C_n(-s)}{A_n(-s)} ds \\ A_n(s) &= s^2 + 1.414 2s = d_2 s^2 + d_1 s + d_0, \end{aligned}$$

并可求得

$$\begin{aligned} C_n(s) &= C_2 s + C_1, \\ J_2 &= \frac{d_0 C_2^2 + C_1^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2} = \frac{C_2^2 + C_1^2}{2 \times 1.414 2}, \end{aligned} \quad (27)$$

由式(26)可以看出, 权系数 C_1 与 C_2 在二维系统中对 J_2 的影响程度是相同, 因此取 $C_1 = C_2$ 若 C_1 与 C_2 均取 1, $\gamma = 0.1 (C_1 + C_2) = 0.2$, 则 $\xi = 0.268 3$, 此 ξ 值正好落在定值系统最优无阻尼波动度的范围内.

对于三阶系统, $C_n(s) = C_3(s) = C_3 s^2 + C_2 s + C_1$, $A_n(s) = A_3(s) = d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$. 本系列论文(1)给出 $A_3(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 1$, 即 $d_3 = d_0 = 1$, $d_2 = 3$, $d_1 = 2$. 按 Parseval 积分方法计算, 得到三阶系统目标函数与系统系数的关系为

$$J_3 = \frac{C_3^2 d_0 d_1 + (C_2^2 - 2C_1 C_3) d_0 d_3 + C_1^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (d_1 d_2 - d_0 d_3)}, \quad (28)$$

代入 d_0, d_1, d_2 与 d_3 数据, 并利用 $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ 以及极值条件 $\partial J_3 / \partial C_1 = 0$ 与 $\partial J_3 / \partial C_3 = 0$, 求得 $C_1 = 0.250$, $C_3 = 0.333$, $C_2 = 0.417$.

对于四阶系统, $A_n(s) = A_4(s) = s^4 + 2.613 2s^3 + 3.144 3s^2 + 2.613 2s + 1$, $C_n(s) = C_4 s^3 +$

$C_3s^2 + C_2s + C$, 按照同样的方法求出 $C_1 = 0.1961$, $C_2 = 0.2991$, $C_3 = 0.3087$, $C_4 = 0.1961$

这样方法可推广到更高阶次的系统, 得到一个同目前系统设计经验非常近似的结果, 即在系统扰动位置无法凭经验或实测确定的时候可将系统的中间状态 x_p 作为主扰动源, 其中 $p \approx \frac{1}{2}n$, n 为系统的最高状态维数.

4 分段系统的 Q 矩阵选择

在系统分段的情况下 Q 矩阵为一个分块对角形矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Q_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & Q_k \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中每一个子矩阵 Q_i 对应于第 i 个分段子系统的状态向量 X_i . 每个 Q_i 由上述各节的方法单独确定, 然后组合成分段系统的加权矩阵 Q . 因此总系统(即集中系统)的权矩阵为一个对角形分块矩阵, 其对角元素为自然可分离, 这就使一个复杂系统的目标函数达到自然分离.

参 考 文 献

- 1 Medanic J V, Uskokovic Z. The design of optimal output regulator for linear multivariable system with constant disturbance. J. of Control., 1983, 37(4):809~830
- 2 Tharp H S. Parameterization of frequency weighting for two-stage linear quadratic regulator based design. Automatic, 1988, 24(3):415~418
- 3 William L B. Modern control theory. New York: Prentice-Hall, 1991. 501~553

Decision about Decentralization and Centralization of System Realization of Control Objective Function

Wang Yongchu

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract It remains a difficult problem to choose weight matrix in control objective function according to the quality indicators of some systems. The author reveals the relation between state weight matrix and control weight function as well as the effect of this relation on the quality of system; and discusses the selection of optimal Q and R values corresponding to three different states of disturbance.

Keywords objective function, weight matrix, response of disturbance, optimal function value