

# 指数分布场合恒定应力加速 寿命试验的 Bayes 分析\*

彭 霁 吴绍敏

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

**摘要** 在指数分布场合, 根据恒定应力加速寿命试验数据, 应用两种方法, 给出平均寿命的点估计及置信下限.

**关键词** 指数分布, 恒定应力, 加速寿命试验, 贝叶斯分析

**分类号** O 213. 2

对高可靠、长寿命的产品, 要获得其试验数据相当困难. 因其寿命试验时间长、花费大, 又不利于产品的更新换代, 故通常采用恒定应力加速寿命试验(简称恒定应力试验). 因许多产品的寿命服从指数分布, 故对指数分布的可靠性统计分析是有实际价值的. 本文将采用回归法与“次序的束”法, 对正常应力下产品平均寿命进行点估计及置信下限估计. 为保证可靠性指标的正确估计, 必须合理选择加速应力水平. 高应力水平的试验数据所提供的寿命信息, 不如低应力水平的试验数据准确. 但建立回归时都是同等的一员, 这样的方程难免影响低应力水平数据的作用. 为克服这一缺点, 可应用“次序约束”法. 先将低应力水平的寿命信息综合评定出来, 然后建立回归方程, 其效果明显改善. 但有的学者应用“次序约束”法时, 忽视如下的事实: 高应力水平的数据隐含有低应力水平的寿命信息; 低应力水平的数据无法提供高应力水平的寿命信息. 因此其分析结果往往是不正确的.

## 1 假定与引理

不同的物理试验模型, 其数据的处理方法不同. 恒加应力试验模型的数据处理方法是基于以下两个基本假定.

**假定 1** 在正常应力水平  $s_0$  与加速应力水平  $s_1, s_2, \dots, s_m$  ( $s_0 < s_1 < \dots < s_m$ ) 下产品的寿命均服从指数分布, 在应力  $s_i$  下产品寿命分布为  $E(\lambda_i)$ .

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}; t \geq 0, (i = \overline{1, m}), \quad (1)$$

其中  $\lambda_i > 0$  是失效率,  $\theta_i = 1/\lambda_i$  是平均寿命.

**假定 2** 产品的平均寿命  $\theta$  与所加应力水平  $s$  之间有如下关系

\* 本文 1994-09-09 收到; 国务院侨办自然科学基金资助项目

$$\ln \theta = a + b\varphi(s) \text{ 或 } \theta = \exp\{a + b\varphi(s)\}, \quad (2)$$

其中  $a, b$  是未知参数,  $\varphi(s)$  是应力水平  $s$  的已知函数. 当应力水平  $s$  是温度时,  $\varphi(s) = 1/s$ , 此时式(2)即阿伦尼斯模型; 当  $s$  是电压时, 式(2)为逆幂律模型.

**引理** 设某产品的寿命服从指数分布, 从一批产品中随机抽取  $n$  个, 分为  $m$  组, 作恒加应力试验. 在应力水平  $s_i$  下  $n_i$  个试验到时刻  $T_i^*$ , 有  $r_i$  个失效, 其失效时间为  $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$ , 余下  $(n_i - r_i)$  个未失效. 记  $T_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)T_i^*$  为试验总时间. 定时截尾试验时,  $T_i^*$  是截尾时间; 定数截尾  $T_i^* = t_{ir_i}$ , 其中  $n = \sum_{i=1}^m n_i$ ,  $(i = \overline{1, m})$ . 则  $L(r_i, T_i, \lambda_i) \propto \lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i T_i}$ ,  $(i = \overline{1, m})$ .

$$\text{证 因 } L(r_i, T_i, \lambda_i) = \frac{n!}{(n_i - r_i)!} \lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i (\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)T_i^*)} = \frac{n!}{(n_i - r_i)!} \lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i T_i}, \text{ 故}$$

$$L(r_i, T_i, \lambda_i) \propto \lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i T_i}.$$

## 2 贝叶斯估计

### 2.1 点估计

由引理知在应力水平  $s_i$  上的似然函数为  $L(r_i, T_i, \lambda_i) \propto \lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i T_i}$ ,  $(i = \overline{1, m})$ . 取  $\lambda_i$  的无信息验前分布  $\pi(\lambda_i) = 1/\lambda_i^{(1)}$ , 则  $\lambda_i$  后验密度为

$$f(\lambda_i | r_i, T_i) = \frac{\lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i}}{\int_0^\infty \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i} d\lambda_i} = \frac{T_i^{r_i}}{\Gamma(r_i)} \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i}. \quad (3)$$

在二次损失下,  $\lambda_i$  的贝叶斯估计为  $\hat{\theta}_i = T_i/r_i$ ,  $(i = \overline{1, m})$ . 与最大似然估计一致, 其统计性质:

(1) 定数时有  $T_i \sim T(r_i, \lambda_i)$ ,  $E(T_i/r_i) = \theta_i$ , 故  $\hat{\theta}_i = T_i/\lambda_i$  是  $\theta_i$  的无偏估计量, 且  $D(\hat{\theta}_i) = \theta_i^2/r_i$ ;

(2) 定时截尾时,  $r_i$  与  $T_i$  都是  $r, \nu$ , 且  $T_i$  中含有  $r_i$ , 故  $r_i$  与  $T_i$  不独立. 但由文[2]知 D. R. Cox.

证明了下述结论:  $2r_i \hat{\theta}_i / \theta_i \dot{\sim} X^2(2r_i + 1)$ ,  $E \hat{\theta}_i \dot{=} (1 + 1/2r_i) \theta_i$ ,  $D \hat{\theta}_i \dot{=} \frac{2r_i + 1}{2r_i^2} \theta_i^2$ . 由此推得  $\frac{2r_i \hat{\theta}_i}{\theta_i} |_{r_i} \dot{\sim} X^2(2r_i + 1)$ , 即  $\frac{2r_i}{\theta_i} |_{r_i} \dot{\sim} X^2(2r_i + 1)$ , 从而  $T_i \dot{\sim} \Gamma(r_i + 1/2, \lambda_i)$ . 故  $E(\frac{T_i}{r_i + 1/2}) \dot{=} \theta_i$ ,  $D(\frac{T_i}{r_i + 1/2}) \dot{=} \frac{\theta_i^2}{r_i + 1/2}$ .

### 2.2 置信下限估计

由式(3)知  $\lambda \sim f(\lambda | r, T) = \frac{T^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-\lambda T}$ . 令  $Y = 2\lambda T \sim \frac{1}{2^{2r/2} \Gamma(r/2)} y^{2r/2-1} \cdot e^{-y} = X^2(2r)$ ,

则对给定的置信水平  $\alpha$ , 有  $P(Y \leq X_\alpha^2(2r)) = 1 - \alpha$ , 故  $\lambda$  的置信上限为  $\lambda_u = \frac{X_\alpha^2(2r)}{2r}$ , 从而得  $\theta$

的置信下限估计为  $\hat{\theta}_L(\alpha) = \frac{2T}{X_\alpha^2(2r)}$ . 因

$$E(\hat{\theta}_L(\alpha)) = E\left(\frac{2T}{X_\alpha^2(2r)}\right) \begin{cases} = \frac{2r\theta}{X_\alpha^2(2r)}, & \text{当定数截尾试验时,} \\ \dot{\sim} \frac{2(r + 1/2)\theta}{X_\alpha^2(2r)}, & \text{当定数截尾试验时.} \end{cases}$$

平均寿命  $\theta$  的  $\alpha$  置信下限  $\theta_L(\alpha)$  总是存在, 故可规定

$$\theta_a(\alpha) = \begin{cases} = \frac{2r\theta}{X_a^2(2r)}, & \text{当定数截尾时,} \\ \sim \frac{2(r+1/2)\theta}{X_a^2(2r)}, & \text{当定时截尾时.} \end{cases}$$

方法 1 由  $\hat{\theta}_i = \frac{T_i}{r_i}$  (或  $\hat{\theta}_i = \frac{T_i}{r_i + 1/2}$ ), 令  $\eta_i = \ln \hat{\theta}_i$ , ( $i = \overline{1, m}$ ). 利用数据  $(\varphi_i, \eta_i)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) 按最小二乘法, 可建立回归方程

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta} &= \exp\{\hat{a} + \hat{b}\varphi(s)\}, \\ \hat{a} &= \ln \bar{\theta} - \bar{\varphi} \hat{b}, \quad \hat{b} = [\sum_{i=1}^m \varphi_i \ln \hat{\theta}_i - m \bar{\varphi} \ln \bar{\theta}] / [\sum_{i=1}^m \varphi_i^2 - m \bar{\varphi}^2], \\ \ln \bar{\theta} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln \hat{\theta}_i, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi_i. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

对给定的  $s_0$  可得  $\theta_0$  的预测值  $\hat{\theta}_0 = \exp\{\hat{a} + \hat{b}\varphi(s_0)\}$ . 由数据  $(\varphi_i, \ln \hat{\theta}_{Li})$  ( $i = \overline{1, m}$ ) 同样可建立  $\theta_L$  的预测方程

$$\hat{\theta}_L(\alpha) = \exp\{\hat{a} + \hat{b}\varphi(s)\}, \quad (5)$$

则  $\theta_0$  的  $\alpha$  置信下限的预测值为  $\hat{\theta}_{0L}(\alpha) = \exp\{\hat{a} + \hat{b}\varphi(s_0)\}$ .

方法 2 由假定 1 知,  $s_1 < s_2 < \dots < s_m$  决定了  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ . 记  $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ ,  $T = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , 则由引理知  $L(r, T, \lambda) \propto \prod_{i=1}^m \lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i T_i}$ . 把  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) 视为  $r$  取其无信息验前分布  $\pi(\lambda_i) = 1/\lambda_i$ , ( $i = \overline{1, m}$ ), 则

$$f(\lambda|r, T) = \prod_{i=1}^m \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i} / \int_D \prod_{i=1}^m \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i} d\lambda_i, \quad D = \{\lambda: \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m\}. \quad (6)$$

$$\text{记 } W_m^* = \int_D \prod_{i=1}^m \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i} d\lambda_i, \quad r_i \geq 1, \quad (i = \overline{1, m}).$$

定理 1  $\lambda_1$  的后验密度函数为

$$f(\lambda_1|r, T) = W_m^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \dots \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} W(j_m, j_{m-1}, \dots, j_2) \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})} \lambda_1^{r_{(1)}-1} e^{-\lambda_1 T_{(1)}},$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r_{(m)} &= r_m, \quad r_{(m-1)} = r_{m-1} + j_m, \quad r_{(i-1)} = r_{i-1} + j_i, \quad (i = \overline{2, m-1}), \\ T_{(m)} &= T_m, \quad T_{(m-1)} = T_m + T_{m+1}, \quad T_{(i-1)} = T_{(i)} + T_{i-1}, \quad (i = \overline{2, m-1}), \\ C_{j_i} &= \frac{T_{(i)}^{j_i} \Gamma(r_{(i-1)})}{T_{(i-1)}^{r_{(i-1)}} \cdot j_i!}, \quad (i = \overline{m, 2}), \quad W(j_m, j_{m-1}, \dots, j_2) = \prod_{i=m}^2 C_{j_i}, \\ W_m &= \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \dots \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} W(j_m, j_{m-1}, \dots, j_2). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

证 当  $m=4$  时证其成立. 由式(6)得

$$\begin{aligned} f(\lambda_1|r, T) &= W_4^{-1} \{ \lambda_1^{r_1-1} e^{-\lambda_1 T_1} \int_{\lambda_1}^{+\infty} \lambda_2^{r_2-1} e^{-\lambda_2 T_2} d\lambda_2 \int_{\lambda_2}^{+\infty} \lambda_3^{r_3-1} e^{-\lambda_3 T_3} d\lambda_3 \int_{\lambda_3}^{+\infty} \lambda_4^{r_4-1} e^{-\lambda_4 T_4} d\lambda_4 \}, \\ I_4 &\triangleq \int_{\lambda_3}^{+\infty} \lambda_4^{r_4-1} e^{-\lambda_4 T_4} d\lambda_4 = T_4^{-r_4} \int_{\lambda_3 T_4}^{+\infty} y^{r_4-1} e^{-y} dy. \end{aligned}$$

应用恒等式  $\int_x^{+\infty} u^{z-1} e^{-u} du = \Gamma(z) \sum_{j=0}^{z-1} \frac{x^j}{j!} e^{-x}$  ( $z$  为正整数), 得

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \lambda_4^{j_4} e^{-\lambda_4 T_4}, \\
 I_3 &= \int_{\lambda_2}^{+\infty} \lambda_3^{r_3-1} e^{-\lambda_3 T_3} \cdot I_4 d\lambda_3 = \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \int_{\lambda_2}^{+\infty} \lambda_3^{r_3+j_4-1} e^{-\lambda_3(r_4+T_3)} d\lambda_3 \\
 &= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \int_{\lambda_2}^{+\infty} \lambda_3^{r_{(3)}-1} e^{-\lambda_3 T_{(3)}} d\lambda_3 = \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \frac{1}{T_{(3)}^{r_{(3)}}} \int_{\lambda_2 T_{(3)}}^{+\infty} y^{r_{(3)}-1} e^{-y} dy \\
 &= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \frac{\Gamma(r_{(3)})}{T_{(3)}^{r_{(3)}}} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \frac{T_{(3)}^{j_3}}{j_3!} \lambda_2^{j_3} e^{-\lambda_2 T_{(3)}}.
 \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\lambda_1}^{+\infty} \lambda_2^{r_2-1} e^{-\lambda_2 T_2} \cdot I_3 d\lambda_2 = \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \frac{T_4^{j_4}}{j_4!} \frac{\Gamma(r_{(3)})}{T_{(3)}^{r_{(3)}}} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \frac{T_{(3)}^{j_3}}{j_3!} \frac{\Gamma(r_{(2)})}{T_{(2)}^{r_{(2)}}} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} \frac{T_{(2)}^{j_2}}{j_2!} \lambda_1^{j_2} e^{-\lambda_1 T_{(2)}}, \\
 I_1 &= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} C_{j_4} C_{j_3} C_{j_2} \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})} \lambda_1^{r_{(1)}-1} e^{-\lambda_1 T_{(1)}} \\
 &= \frac{\Gamma(r_4)}{T_4^{r_4}} \sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} W(j_4, j_3, j_2) \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})} \lambda_1^{r_{(1)}-1} e^{-\lambda_1 T_{(1)}}.
 \end{aligned}$$

故得  $f(\lambda_1 | r, T) = I_1 / W_4^*$ . 因  $\int_0^{+\infty} f(\lambda_1 | r, T) d\lambda_1 = 1$ ,  $W_4^* = \frac{\Gamma(r_{(4)})}{T_4^{r_{(4)}}} W_4$  所以  $f(\lambda_1 | r, T) = W_4^{-1}$

$$\sum_{j_4=0}^{r_{(4)}-1} \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} W(j_4, j_3, j_2) \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})} \lambda_1^{r_{(1)}-1} e^{-\lambda_1 T_{(1)}}.$$

推论 1 在二次损失下  $\lambda_1$  的贝叶斯估计为

$$\hat{\lambda}_1 = W_m^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_2=0}^{r_{(2)}-1} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_2) \frac{T_{(1)}^{r_{(1)}}}{\Gamma(r_{(1)})}. \quad (8)$$

因低应力水平的试验数据无法提供高应力水平的寿命信息,故得

推论 2 应用  $s_2 < s_3 < \cdots < s_m, \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_m$ , 可推得

$$f(\lambda_2 | r, T) = W_m^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_3) \frac{T_{(2)}^{r_{(2)}}}{\Gamma(r_{(2)})} \lambda_2^{r_{(2)}-1} e^{-\lambda_2 T_{(2)}}. \quad (9)$$

在二次损失下,  $\lambda_2$  的贝叶斯估计为  $\hat{\lambda}_2 = W_m^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_3=0}^{r_{(3)}-1} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_3) \frac{T_{(2)}^{r_{(2)}}}{\Gamma(r_{(2)})}$ . 一般

的,  $\hat{\lambda}_{i-1} = W_m^{-1} \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots \sum_{j_i=0}^{r_{(i)}-1} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_i) \frac{T_{(i-1)}^{r_{(i-1)}}}{\Gamma(r_{(i-1)})} (2 \leq i \leq m)$ ,  $W_m = \sum_{j_m=0}^{r_{(m)}-1} \sum_{j_{m-1}=0}^{r_{(m-1)}-1} \cdots$

$\sum_{j_i=0}^{r_{(i)}-1} W(j_m, j_{m-1}, \cdots, j_i)$ ,  $\hat{\lambda}_m = r_m / T_m$ , 则水平  $s_i$  上的平均寿命的估计值为  $\hat{\theta}_i = 1 / \hat{\lambda}_i (i = \overline{1, m})$ . 令

$\eta_i = \ln \hat{\theta}_i$ , 用数据  $(\varphi_i, \eta_i) (i = \overline{1, m})$  按最小二乘法可建立预测方程  $\hat{\theta} = \exp\{\hat{a} + \hat{b}\varphi(s)\}$ . 显然, 这个方程与用方法一建立的方程是有区别的.

### 3 举例

取四个加速温度水平  $s_1 = 463 \text{ K}$ ,  $s_2 = 493 \text{ K}$ ,  $s_3 = 513 \text{ K}$ ,  $s_4 = 533 \text{ K}$ . 加速模型取阿伦尼斯模型, 即  $\varphi(s) = 1/k_0 s$ ,  $k_0 = 0.8617 \times 10^{-4} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}$ . 可算得  $\varphi_1 = 25.0647$ ,  $\varphi_2 = 23.5595$ ,  $\varphi_3 = 22.6218$ ,  $\varphi_4 = 21.7729$ . 取加速方程(2)中的  $a = -18$ ,  $b = 1$ , 即  $\theta_1 = 117.0$ ,  $\theta_2 = 255$ ,  $\theta_3$

$=102$ ,  $\theta_4=44$ . 取正常应力水平  $s_0=443$  K, 正常应力水平的平均寿命为  $\theta_0=362$  8, 则在各应力水平下模拟的数据定数截尾试验为

$s_1$ :	155.96	318.02	412.95	689.09	$n_1=10$	$r_1=4$
$s_2$ :	55.01	65.99	97.00	103.99	$n_2=10$	$r_2=4$
$s_3$ :	4.99	10.98	14.01	52.00	$n_3=10$	$r_3=4$
$s_4$ :	3.01	11.99	14.98	26.98	$n_4=10$	$r_4=4$

定时截尾试验为

$s_1$ :	155.96	318.02	412.95		$T_1^*=500$	$n_1=10$	$r_1=3$
$s_2$ :	25.99	55.01	67.08	97.03	$T_2^*=110$	$n_2=10$	$r_2=4$
$s_3$ :	5.01	10.99	14.01	24.11	$T_3^*=70$	$n_3=10$	$r_3=5$
$s_4$ :	3.01	12.03	15.00	27.80	$T_4^*=30$	$n_4=10$	$r_4=4$

方法 1 计算得定数的预测方程为

$$\hat{\theta} = \exp\{-17.974\ 2 + 1.002\ 15\varphi(s)\}, \quad (\text{I}_a)$$

$\hat{\theta}_0=3\ 937.98$ ,  $\hat{\lambda}_0=2.539\ 37 \times 10^{-4}$ ; 定时的预测方程为

$$\hat{\theta} = \exp\{-17.612\ 4 + 0.981\ 23\varphi(s)\}, \quad (\text{I}_b)$$

$\hat{\theta}_0=3\ 268.86$ ,  $\hat{\lambda}_0=3.059\ 17 \times 10^{-4}$ . 给定置信水平  $\alpha=0.05$ , 平均寿命  $\theta_0$  的置信下限计算: 定数的预测方程为

$$\hat{\theta}_L(\alpha) = \exp\{-18.633\ 6 + 1.002\ 04\varphi(s)\}, \quad (\text{L}_a)$$

$\hat{\theta}_{0L}=2\ 030.71$ ,  $\hat{\lambda}_{0L}=4.924\ 4 \times 10^{-4}$ ; 定时的预测方程为

$$\hat{\theta}_L(\alpha) = \exp\{-15.898\ 8 + 0.883\ 6\varphi(s)\}, \quad (\text{L}_b)$$

$\hat{\theta}_{0L}=1\ 405.64$ ,  $\hat{\lambda}_{0L}=7.114\ 2 \times 10^{-4}$ .

方法 2 的计算要应用计算机来完成. 定数的情形:  $T_1=5\ 710.56$ ,  $T_2=945.93$ ,  $T_3=393.98$ ,  $T_4=218.84$ ,  $r_1=4$ ,  $r_2=4$ ,  $r_3=4$ ,  $r_4=4$ ,  $r_{(4)}=4$ ,  $r_{(3)}=4+j_4$ ,  $r_{(2)}=4+j_3$ ,  $r_{(1)}=4+j_2$ ,  $T_{(4)}=218.84$ ,  $T_{(3)}=612.82$ ,  $T_{(2)}=1\ 558.75$ ,  $T_{(1)}=7\ 269.31$ .

$$W_4 = \sum_{j_4=0}^3 \sum_{j_3=0}^{3+j_4} \sum_{j_2=0}^{3+j_4} (0.357\ 1)^{j_4} \frac{(3+j_4)!}{j_4!} (0.393\ 2)^{j_3} \frac{(3+j_3)!}{j_3!} (0.214\ 4)^{j_2} \frac{(3+j_2)!}{j_2!},$$

$$I_1 = \sum_{j_4=0}^3 \sum_{j_3=0}^{3+j_4} \sum_{j_2=0}^{3+j_4} (0.357\ 1)^{j_4} \frac{(3+j_4)!}{j_4!} (0.393\ 2)^{j_3} \frac{(3+j_3)!}{j_3!} (0.214\ 4)^{j_2} \frac{(3+j_2)!}{j_2!} \left( \frac{4+j_2}{7\ 269.31} \right),$$

$$\hat{\lambda}_1 = I_1/W_4, \quad \hat{\theta}_1 = 1/\hat{\lambda}_1 = 144\ 0.32;$$

$$W_3 = \sum_{j_4=0}^3 \sum_{j_3=0}^{3+j_4} (0.357\ 1)^{j_4} \frac{(3+j_4)!}{j_4!} (0.393\ 2)^{j_3} \frac{(3+j_3)!}{j_3!},$$

$$I_2 = \sum_{j_4=0}^3 \sum_{j_3=0}^{3+j_4} (0.357\ 1)^{j_4} \frac{(3+j_4)!}{j_4!} (0.393\ 2)^{j_3} \frac{(3+j_3)!}{j_3!} \left( \frac{4+j_3}{1\ 558.75} \right),$$

$$\hat{\lambda}_2 = I_2/W_3, \quad \hat{\theta}_2 = 1/\hat{\lambda}_2 = 256;$$

$$W_2 = \sum_{j_4=0}^3 (0.357\ 1)^{j_4} \frac{(3+j_4)!}{j_4!}, \quad I_3 = \sum_{j_4=0}^3 (0.357\ 1)^{j_4} \frac{(3+j_4)!}{j_4!} \left( \frac{4+j_4}{612.82} \right),$$

$$\hat{\lambda}_3 = I_3/W_2, \quad \hat{\theta}_3 = 1/\hat{\lambda}_3 = 104.63; \quad \hat{\lambda}_4 = r_4/T_4, \quad \hat{\theta}_4 = 1/\hat{\lambda}_4 = 54.5.$$

再应用回归法求得预测方程为

$$\hat{\theta} = \exp\{-17.968\,17 + 1.003\,44\varphi(s)\}, \quad (\text{I}_a)$$

$$\hat{\theta}_0=4\,097.96, \hat{\lambda}_0=2.440\,3\times 10^{-4}.$$

定时的情形:  $T_1=4\,386.96, T_2=905.11, T_3=456.13, T_4=237.84, r_1=3, r_2=4, r_3=5, r_4=$   
 $=4, r_{(4)}=4, r_{(3)}=5+j_4, r_{(2)}=4+j_3, r_{(1)}=3+j_2, T_{(4)}=237.84, T_{(3)}=783.97, T_{(2)}=1\,689.$   
 $08, T_{(1)}=5\,976.04.$

$$W_4=\sum_{j_4=0}^4\sum_{j_3=0}^{5+j_4}\sum_{j_2=0}^{4+j_3}(0.303\,4)^{j_4}\frac{(4+j_4)!}{j_4!}(0.464\,1)^{j_3}\frac{(3+j_3)!}{j_3!}(0.282\,6)^{j_2}\frac{(2+j_2)!}{j_2!},$$

$$I_1=\sum_{j_4=0}^4\sum_{j_3=0}^{5+j_4}\sum_{j_2=0}^{4+j_3}(0.303\,4)^{j_4}\frac{(4+j_4)!}{j_4!}(0.464\,1)^{j_3}\frac{(3+j_3)!}{j_3!}(\frac{3+j_2}{5\,976.04}),$$

$$\hat{\lambda}_1=I_1/W_4, \hat{\theta}_1=1/\hat{\lambda}_1=1\,436.49;$$

$$W_3=\sum_{j_4=0}^4\sum_{j_3=0}^{5+j_4}(0.303\,4)^{j_4}\frac{(4+j_4)!}{j_4!}(0.464\,1)^{j_3}\frac{(3+j_3)!}{j_3!},$$

$$I_2=\sum_{j_4=0}^4\sum_{j_3=0}^{5+j_4}(0.303\,4)^{j_4}\frac{(4+j_4)!}{j_4!}(0.464\,1)^{j_3}\frac{(3+j_3)!}{j_3!}(\frac{4+j_3}{1\,689.08}),$$

$$\hat{\lambda}_2=I_2/W_3, \hat{\theta}_2=1/\hat{\lambda}_2=241.43;$$

$$W_2=\sum_{j_4=0}^4(0.303\,4)^{j_4}\frac{(4+j_4)!}{j_4!}, \quad I_3=\sum_{j_4=0}^4(0.303\,4)^{j_4}\frac{(4+j_4)!}{j_4!}(\frac{5+j_4}{783.97}),$$

$$\hat{\lambda}_3=I_3/W_2, \hat{\theta}_3=1/\hat{\lambda}_3=109.73; \quad \hat{\lambda}_4=r_4/T_4, \hat{\theta}_4=1/\hat{\lambda}_4=59.46.$$

再应用回归法算得

$$\hat{\theta} = \exp\{-17.237\,9 + 0.972\,8\varphi(s)\}, \quad (\text{I}_b)$$

$$\hat{\theta}_0=3\,811.81, \hat{\lambda}_0=2.623\,4\times 10^{-4}.$$

# 4 分析与结论

将各个预测方程的  $\hat{a}, \hat{b}$  及  $\hat{\theta}_0, \hat{\lambda}_0$  列于附表,从附表中可以得出四种情况:(1)只有方程

附表 各个方程的数值比较

项目	原始值	(I <sub>a</sub> )	误 差	(I <sub>a</sub> )	误 差	(I <sub>b</sub> )
<i>a</i>	-18	-17.974 2	+0.025 8	-17.968 17	+0.031 83	-17.612 4
<i>b</i>	1	1.002 15	+0.002 15	1.003 44	+0.003 44	0.981 23
<i>θ</i> <sub>0</sub>	3628	3 937.98	+309.98	4 097.96	+469.96	3 268.86
<i>λ</i> <sub>0</sub>	2.756 3×10 <sup>-4</sup>	2.539 4×10 <sup>-4</sup>	-2.169×10 <sup>-5</sup>	2.440 3×10 <sup>-4</sup>	-3.16×10 <sup>-5</sup>	3.059 2×10 <sup>-4</sup>

项目	误 差	(I <sub>b</sub> )	误 差	(La)	误 差	(L <sub>b</sub> )	误 差
<i>a</i>	+0.387 6	-17.237 9	+0.762 1	-18.633 6	-0.633 6	-15.898 8	2.101 2
<i>b</i>	-0.018 8	0.972 8	-0.027 2	1.002 04	0.002 04	0.883 6	-0.116 4
<i>θ</i> <sub>0</sub>	-359.14	3 811.81	183.81	2 030.71		1 405.64	
<i>λ</i> <sub>0</sub>	-3.03×10 <sup>-5</sup>	2.623 4×10 <sup>-4</sup>	-1.329×10 <sup>-5</sup>	4.924 4×10 <sup>-4</sup>		7.114 2×10 <sup>-4</sup>	

(L<sub>a</sub>)的  $\hat{a}<a$ ,其余方程的  $\hat{a}>a$ . 除(L<sub>b</sub>)例外,其误差:0.025 8<误差<0.762 1. (2)只有  
 (I<sub>a</sub>),(I<sub>b</sub>),(L<sub>a</sub>)的  $\hat{b}>b$ ,且 0.002 04<误差<0.003 44, 其余方程的  $\hat{b}<b$ ,且-0.116 4<误  
 差<0.018 8. (1),(2)两点说明各个方程的参数  $\hat{a}, \hat{b}$  与 *a, b* 的拟合相当好,其中(L<sub>b</sub>)差些.  
 (3)方程(I<sub>a</sub>),(I<sub>a</sub>),(I<sub>b</sub>)的  $\hat{\theta}_0>\theta_0$ ,而(L<sub>b</sub>)的  $\hat{\theta}<\theta_0$ ,且(I<sub>a</sub>),(I<sub>b</sub>)的  $\hat{\theta}_0$  比  $\theta_0$  大得更多. 这

说明利用  $s_i(i=1,4)$  的数据信息,预测  $\theta_0$  时,有三个方程预测趋势偏大,而  $(I_a), (I_b)$  一致预测趋势偏大. 因低水平的数据无法提供高水平的寿命信息,而高水平的数据中隐含有低水平的寿命信息,应用方法二时,先将隐含于高水平数据中的低水平寿命信息综合出来,再进行回归,从而导致低水平的寿命信息在回归中的“权重”增大. 所以预报的  $\hat{\theta}_0$  会更大些. 这正好证明了方法二优于方法一. (4)  $\hat{\theta}_{0L}(0.05)|_{(I_a)} = 2\ 030.71$ ,  $\hat{\theta}_{0L}(0.05)|_{(I_b)} = 1\ 405.64$ , 且所有的  $\hat{\theta}_0 > \hat{\theta}_{0L}(\alpha)$ , 说明对  $\theta_0$  置信下限的预测是可行的.

### 参 考 文 献

- 1 茆诗松. 指数分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析. 应用数学学报, 1985, (3): 311~316
- 2 Zhang Yaoting, Yao Qiwei. Some maximal information and generalized maximal entropg priors. Chinese Journal of Applied Probobility and Statisitics, 1991, 7(2): 192~200
- 3 茆诗松, 王玲玲. 可靠性统计. 上海: 华东师范大学出版社, 1984. 177~184
- 4 方开泰, 许建伦. 统计分布. 北京: 科学出版社, 1987. 99~107

## Bayesian Analysis of Accelerated life Testing under Exponential Distribution

Peng Pei Wu Shaomin

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** Under exponential distribution, the authors give point estimation and fiducial lower limit of average life testing based on the data from constant stress life testing and by applying two methods.

**Keywords** exponential distribution, constant stress, accelerated life testing, Bayesian analysis