非线性周期系统的不稳定周期解*

王 全 义

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 研究一类非线性周期微分系统周期解的存在性、唯一性和不稳定性问题．在某些条件下，通过利用指数型二分性和不动点方法，得到此类系统存在着唯一的不稳定的周期解的新结果．

关键词 微分系统，周期解，存在性，指数型二分性，不动点方法

分类号 O 175.1

文〔1〕利用李雅普诺夫函数和 Browder 不动点方法，研究了下列非线性周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+g(t,x),\tag{1}$$

的周期解的存在性问题．这里 $x\in R^n$、$t\in R$；$A(t)$是 n 阶实连续的函数方阵，且 $A(t+\omega)=A(t)$($\omega>0$ 为常数)；$g(t,x)$是 $R\times R^n$ 上的 n 维连续函数，且对任意的$(t,x)\in R\times R^n$，$g(t+\omega,x)=g(t,x)$．文〔2〕也研究系统(1)的周期解的存在性问题．本文将继续研究系统(1)的周期解的存在性、唯一性与不稳定性问题，并得到了一些不同于文〔1〕,〔2〕的新结果．

1 一些引理

本节先给出一些有用的引理．考虑系统(1)的齐次线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x,\tag{2}$$

这里 $A(t)$、x 如前所述．

引理 1 对于系统(2)，假定下列条件成立：$A(t)$的 n 个不同特征根 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，…，$\lambda_n(t)$满足 $\mathrm{R_e}(\lambda_j(t))\geqslant\delta>0$，$j=1,2,\cdots,n$；且 $\|A(t)\|\leqslant K$ 及 $\|\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}_t}\|\leqslant K_1$，其中 $K_1<\frac{1}{2K_0^2}$，$K_0=\frac{2^{n-1}}{2\delta}(1+\frac{K}{2\delta})^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$．则系统(2)的基本解方阵 $X(t)$满足

$$\|X(t)X^{-1}(s)\|\leqslant\beta\exp(-\alpha(s-t))\quad(s\geqslant t),\tag{3}$$

其中 $\alpha=(1-2K_0^2K_1)/K_0$，$\beta=n\cdot\sqrt{2KK_0}>0$．

证 令 $A_1(t)=-A(t)$，则由引理的条件可知$[-\lambda_j(t)]$($j=1,2,\cdots,n$)是 $A_1(t)$的 n 个不同特征根，且 $\mathrm{Re}[-\lambda_j(t)]\leqslant-\delta<0$，$j=1,2,\cdots,n$．因此由文〔3〕引理 5.2.2 可知：存在着一个

* 本文1994-10-20收到；福建省自然科学基金资助项目

n 阶哈密顿对称方阵 $G(t)$,使得

$$A_1^*(t)G(t)+G(t)A_1(t)=-I, \tag{4}$$

$$\|G(t)\|\leqslant K_0. \tag{5}$$

这里 $K_0=\frac{2^{n-1}}{2\delta}(1+\frac{K}{2\delta})^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}$. 又由文[3]推论 5.2.2 知,$G(t)$的 n 个不同特征根 $g_j(t)$满足

$$g_j(t)\geqslant 1/(2n^2K) \qquad (j=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

现在把式(4)重新写为

$$A^*(t)G(t)+G(t)A(t)=I. \tag{7}$$

设 $x(t)$是系统(2)的任一非零解. 取

$$V(t,x(t))=x^*(t)G(t)x(t), \tag{8}$$

则由文[3]定理 5.2.4 的证明中可得

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2)}\geqslant(1-2K_0^2K_1)\|x\|^2. \tag{9}$$

由式(4),(5),(8)可得

$$\frac{\|x\|^2}{2n^2K}\leqslant V(t,x)\leqslant K_0\|x\|^2. \tag{10}$$

于是由式(9),(10)可得

$$\frac{1}{V(t,x)}\cdot\frac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}\geqslant 2\alpha, \tag{11}$$

其中 $\alpha=(1-2K_0^2K_1)/2K_0>0$. 设 $t\leqslant s$, 在区间$[t,s]$上积分式(10)的两边,得

$$V(t,x(t))\leqslant V(s,x(s))\exp(-2\alpha(s-t)) \quad (s\geqslant t). \tag{12}$$

从式(10),(12)可得 $(2n^2K)^{-1}\|x(t)\|^2\leqslant K_0\|x(s)\|^2\exp(-2\alpha(s-t))$, $s\geqslant t$, 即

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|}\leqslant\beta\exp(-\alpha(s-t)) \qquad (s\geqslant t), \tag{13}$$

这里 $\beta=n\sqrt{2K_0K}$.

设 $X(t)$是系统(2)任意一个基本解方阵,则 $\|X(t)X^{-1}(s)\|=\sup\limits_{\|x_0\|\neq 0}\|X(t)X^{-1}(s)x_0\|/\|x_0\|$. 记 $x_1=X^{-1}(s)X_0$,则

$$\|X(t)X^{-1}(s)\|=\sup_{\|x_1\|\neq 0}\frac{\|X(t)x_1\|}{\|X(s)x_1\|}=\sup_{\|x_1\|\neq 0}\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|}$$
$$\leqslant\beta\exp(-\alpha(s-t)) \quad (s\geqslant t), \tag{14}$$

引理 1 证毕.

引理 2[4] 假设 $f(t)$是一个 n 维连续的 ω-周期函数,则对任意的 $t\in R$,有

$$\int_t^{t+\omega}f(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^{\omega}f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

引理 3 设 $\varphi(t)$, $f_1(t)$ 为区间$[a,b]$上的非负连续函数,且满足

$$\varphi(t)\leqslant M_0+M_1\int_t^b f_1(s)\varphi(s)\mathrm{d}s \quad t\in[a,b], \tag{15}$$

其中 M_0,M_1 都是正常数,则

$$\varphi(t)\leqslant M_0\exp(M_1\int_t^b f_1(s)\mathrm{d}s). \tag{16}$$

证　令 $F(t)=\int_t^b f_1(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$，则有 $\mathrm{d}F(t)/\mathrm{d}t=-f_1(t)\varphi(t)$. 又由式(15)可得 $\mathrm{d}F(t)/\mathrm{d}t \geqslant -f_1(t)[M_0+M_1F(t)]$，或 $\mathrm{d}F(t)/(M_0+M_1F(t))\geqslant -f_1(t)\mathrm{d}t$，所以 $\ln[M_0/(M_0+M_1F(t)]\geqslant -M_1\int_t^b f_1(s)\mathrm{d}s$. 从而，$M_0+M_1F(t)\leqslant M_0\exp(M_1\int_t^b f_1(s)\mathrm{d}s)$. 再由式(15)即得式(16). 引理 3 证毕．

引理 4　考虑下列周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f_2(t), \tag{17}$$

这里 $A(t)$满足引理 1 的所有条件，$f_2(t)$是一个 n 维连续的 ω-周期函数，则系统(17)具有唯一的 ω-周期解 $x(t)$且它满足

$$x(t)=-\int_t^{+\infty}X(t)X^{-1}(s)f_2(s)\mathrm{d}s, \tag{18}$$

这里 $X(t)$是系统(2)的一个基本解方阵．

证　(i) 先证式(18)的右边是有界的．由引理的条件可知，存在着常数 $M>0$，使得 $\|f_2(t)\|\leqslant M$. 又由引理 1 得

$$\|x(t)\|\leqslant\int_t^{+\infty}\|X(t)X^{-1}(s)\|\cdot\|f_2(s)\|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant M\int_t^{+\infty}\beta\exp(-\alpha(s-t))\mathrm{d}s=\frac{M\beta}{\alpha}.$$

(ii) 直接微分式(18)的两边可知 $x(t)$是系统(17)的一个解．(iii) 证明 $x(t)$是系统(17)的 ω-周期解．由于系统(2)是周期系统，所以我们有 $X(t+\omega)X^{-1}(s+\omega)=X(t)X^{-1}(s)$，从而有

$$\begin{aligned} x(t+\omega) &= -\int_{t+\omega}^{+\infty}X(t+\omega)X^{-1}(s)f_2(s)\mathrm{d}s \\ &\overset{s=\tau+\omega}{=\!=\!=} -\int_t^{+\infty}X(t+\omega)X^{-1}(\tau+\omega)f_2(\tau+\omega)\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_t^{+\infty}X(t)X^{-1}(\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau = x(t), \end{aligned}$$

即 $x(t)$是系统(17)的 ω-周期解．(iv) 因为系统(2)满足指数型二分性，故系统(17)具有唯一的 ω-周期解．引理 4 证毕．

2　主要结果及其证明

定理 1　假定系统(1)满足引理 1 中的所有条件及下列条件：假定存在着连续非负的 ω-周期函数 $a_1(t)(t\in R)$满足 $\int_0^\omega a_1(s)\mathrm{d}s\triangleq a_2<\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}{\beta}$（这里 α,β 由引理 1 给定），使得对任意的 $x_1,x_2\in R^n$，$t\in R$ 有

$$\|g(t,x_1)-g(t,x_2)\|\leqslant a_1(t)\|x_1-x_2\|, \tag{19}$$

则系统(1)存在着唯一的、不稳定的 ω-周期解．

证　设 $D=\{V(t)|V(t)$是 R 上的 n 维连续的 ω-周期函数$\}$，则 D 在范数 $\|V\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{\|V(t)\|\}$下是一个 Banach 空间．对任意的 $V\in D$，考虑下列周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + g(t,V(t)). \tag{20}$$

由定理的条件及引理 4 可知，系统(18)具有唯一的 ω-周期解

$$x_v(t) = -\int_t^{+\infty} X(t)X^{-1}(s)g(s,V(s))\mathrm{d}s, \tag{21}$$

其中 $X(t)$ 是系统(2)的基本解方阵．现在定义算子 $T:D\to D$ 如下

$$TV(t) = x_v(t), \quad \forall V \in D. \tag{22}$$

易见算子 T 的不动点就是方程(1)的 ω-周期解．

下面先证明 $T: D\to D$ 是一个压缩映射．事实上，对任意的 $V_1,V_2\in D$，由定理的条件及引理 1,2 可知有

$$\begin{aligned}
\| TV_1(t) - TV_2(t) \| &\leqslant \int_t^{+\infty} \| X(t)X^{-1}(s) \| \cdot \| g(s,V_1(s)) - g(s,V_2(s)) \| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \beta \int_t^{+\infty} \exp(-\alpha(s-t))a_1(s) \| V_1(s) - V_2(s) \| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \beta \| V_1 - V_2 \| \int_t^{+\infty} a_1(s)\exp(-\alpha(s-t))\mathrm{d}s \\
&= \beta \| V_1 - V_2 \| \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{t+j\omega}^{t+(j+1)\omega} a_1(s)\exp(-\alpha(s-t))\mathrm{d}s \\
&\leqslant \beta \| V_1 - V_2 \| \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j\alpha\omega} \int_{t+j\omega}^{t+(j+1)\omega} a_1(s)\mathrm{d}s \\
&= \beta \| V_1 - V_2 \| \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j\alpha\omega} \int_0^{\omega} a_1(s)\mathrm{d}s = \beta \| V_1 - V_2 \| a_2 \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j\alpha\omega} \\
&= \beta a_2 \| V_1 - V_2 \| \cdot \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}} = r \| V_1 - V_2 \|,
\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $r=a_2 \cdot \dfrac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}$，$0<r<1$. 从上式得

$$\| TV_1 - TV_2 \| \leqslant r \| V_1 - V_2 \|. \tag{24}$$

由此得知 $T:D\to D$ 是一个压缩映象．因此由压缩映象原理知算子 T 在 D 中具有唯一的的不动点，从而系统(1)具有唯一的 ω-周期解．

其次证明系统(1)的任一解都是不稳定的．设 $x(t)$，$y(t)$ 都是系统(1)的两个不同的解．令 $u(t)=x(t)-y(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)u + [g(t,x(t)) - g(t,y(t))].$$

设 $t_1<t_2$，则由常数变易法得

$$u(t_2) = X(t_2)X^{-1}(t_1)u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} X(t_2)X^{-1}(s)[g(s,x(s)) - g(s,y(s))]\mathrm{d}s,$$

从而有

$$u(t_1) = X(t_1)X^{-1}(t_2)u(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} X(t_1)X^{-1}(s)[g(s,x(s)) - g(s,y(s))]\mathrm{d}s,$$

所以

$$\|u(t_1)\| \leqslant \|X(t_1)X^{-1}(t_2)\| \, \|u(t_2)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|X(t_1)X^{-1}(s)\| \times \|g(s,x(s)) - g(s,y(s))\| \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(t_2-t_1)} \|u(t_2)\| + \int_{t_1}^{t_2} \beta \exp(-\alpha(s-t_1)) a_1(s) \|u(s)\| \mathrm{d}s.$$

从而

$$\exp(\alpha(t_2-t_1)) \|u(t_1)\| \leqslant \|u(t_2)\| + \int_{t_1}^{t_2} \beta \exp(\alpha(t_2-s)) a_1(s) \|u(s)\| \mathrm{d}s.$$

由引理 3 得

$$\exp(\alpha(t_2-t_1)) \|u(t_1)\| \leqslant \|u(t_2)\| \exp(\beta \int_{t_1}^{t_2} a_1(s)\mathrm{d}s),$$

即

$$\|u(t_2)\| \geqslant \|u(t_1)\| \exp[\alpha(t_2-t_1) - \beta \int_{t_1}^{t_2} a_1(s)\mathrm{d}s] \quad (t_2 \geqslant t_1), \tag{25}$$

令 $t_1=t_0$，$t_2=t_0+m\omega$，这里 m 为自然数，于是 $t_1<t_2$，且 $\int_{t_0}^{t_0+m\omega} a_1(s)\mathrm{d}s = ma_2$，因此由式(25)可得

$$\|u(t_0+m\omega)\| \geqslant \|u(t_0)\| \exp(m\alpha\omega - m\beta a_2),$$

因 $a_2<\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}{\beta}<\frac{\alpha\omega}{\beta}$，所以 $a_2\beta<\alpha\omega$，从而当 $m\to+\infty$ 时，$(m\alpha\omega-\beta m a_2)\to+\infty$. 由于 $\|u(t_0)\|\neq 0$，故当 $m\to+\infty$ 时，$\|u(t_0+m\omega)\|\to+\infty$. 即系统(1)的任意解都是不稳定的．定理 1 证毕．

定理 2　假定系统(1)满足引理 1 中的所有条件及下列条件：存在着常数 l 满足 $0<l<\frac{\alpha}{\beta}$（这里 α,β 由引理 1 给定），使得对任意的 x_1、$x_2\in R^n$、$t\in R$ 都有

$$\|g(t,x_1) - g(t,x_2)\| \leqslant l\|x_1 - x_2\|. \tag{26}$$

则系统(1)具有唯一的不稳定的 ω-周期解．

证　该定理的证明完全类似于定理 1 的证明，只是在估计 $\|TV_1(t)-TV_2(t)\|$ 的值时有一点小差别而已，其估计过程如下，其余证明从略．

由式(26)知

$$\|TV_1(t) - TV_2(t)\| \leqslant \int_t^{+\infty} \|X(t)X^{-1}(s)\| \cdot \|g(s,V_1(s)) - g(s,V_2(s))\| \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \beta l \int_t^{+\infty} \|V_1(s) - V_2(s)\| \exp(-\alpha(s-t))\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \beta l \|V_1 - V_2\| \int_t^{+\infty} \exp(-\alpha(s-t))\mathrm{d}s$$
$$= \frac{\beta l}{\alpha} \|V_1 - V_2\| = r\|V_1 - V_2\|.$$

这里 $r=\frac{\beta l}{\alpha}$，因为 $0<l<\frac{\alpha}{\beta}$，所以 $r<1$. 定理 2 证毕．

定理 3　假定系统(1)满足引理 1 中的所有条件及下列条件：

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\int_0^{\omega}\sup_{\|x\|\leqslant m}\|g(t,x)\|\mathrm{d}t<\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}{\beta},\tag{27}$$

这里 α,β 由引理 1 给定．则系统(1)至少存在着一个 ω-周期解．

证　仍引用定理 1 中的 Banach 空间 D 及算子 $T:D\to D$. 下面在定理的条件下证明算子 $T:D\to D$ 至少具有一个不动点，从而系统(1)至少存在一个 ω-周期解．

事实上，记 $D_m=\{V|V\in D$ 且 $\|V\|\leqslant m\}$，其中 m 为自然数．

(a) 先证存在着自然数 N，使得 $T:D_N\to D_N$. 用反证法．若不然，对任意的自然数 m，都存在着 $V_m\in D_m$，使得 $\|TV_m\|\geqslant m$. 于是，由定理的条件及引理 1,2 有

$$\begin{aligned}\|TV_m(t)\| &\leqslant\int_t^{+\infty}\|X(t)X^{-1}(s)\|\cdot\|g(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant\beta\int_t^{+\infty}\exp(-\alpha(s-t))\|g(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\ &=\beta\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t+j\omega}^{t+(j+1)\omega}\exp(-\alpha(s-t))\|g(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\ &\leqslant\beta\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\alpha\omega}\int_{t+j\omega}^{t+(j+1)\omega}\|g(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\ &=\beta\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\alpha\omega}\int_0^{\omega}\|g(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\ &=\frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}\int_0^{\omega}\|g(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{28}$$

因此

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{\|TV_m(t)\|}{m}\leqslant\frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}\cdot\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\int_0^{\omega}\|g(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s,$$

于是由式(27)得

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{\|TV_m(t)\|}{m}<\frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}{\beta}=1.$$

即当 m 充分大时，$\|TV_m\|<m$ 这与 $\|TV_m\|\geqslant m$ 相矛盾．因此存在着一个自然数 N 使得 $T:D_N\to D_N$.

(b) 下面证明 TD_N 在 D 中是相对的紧子集. 因为 $TD_N\subseteq D_N$，所以 $\{TD_N\}$ 是一致有界的. 记 $R_N\triangleq\{x|x\in R^n$ 且 $\|x\|\leqslant N\}$，$b_1\triangleq\sup\{\|g(t,x)\||(t,x)\in[0,\omega]\times R_N\}$，$b_2\triangleq\sup\{\|A(t)\||t\in R\}$.

因为对任意的 $V\in D_N$，有 $\mathrm{d}TV(t)/\mathrm{d}t=A(t)TV(t)+g(t,V(t))$，因此

$$\left\|\frac{\mathrm{d}TV(t)}{\mathrm{d}t}\right\|\leqslant\|A(t)\|\cdot\|TV(t)\|+\|g(t,V(t))\|\leqslant b_2N+b_1.$$

从而 $\{TD_N\}$ 是等度连续的．于是由 Ascoli-Arzela 定理知 $\{TD_N\}$ 是 D 中的一个紧子集．

(c) 证明 $T:D_N\to D_N$ 是一个连续算子．事实上，对任意的 $V_1,V_2\in D_N$ 有

$$TV_1(t)-TV_2(t)=-\int_t^{+\infty}X(t)X^{-1}(s)[g(s,V_1(s))-g(s,V_2(s))]\mathrm{d}s.$$

因此由式(28)的估计方法及上式可得

$$\| TV_1(t) - TV_2(t) \| \leqslant \frac{\beta}{1 - e^{-\alpha\omega}} \int_0^{\omega} \| g(s, V_1(s)) - g(s, V_2(s)) \| \, ds. \tag{29}$$

因为 $g(t,x)$ 在有界闭集 $[0,\omega]\times R_N$ 上是一致连续的，故当 $\| V_1 - V_2 \| \to 0$ 时，$\| g(s,V_1(s)) - g(s,V_2(s)) \| \to 0$ 对 $s\in[0,\omega]$ 是一致成立的，从而有 $\| TV_1 - TV_2 \| \to 0$，即 $T: D_N \to D_N$ 是连续的．

综上述可知 $T: D_N \to D_N$ 是一个连续算子．因此由 Schauder 不动点原理得到：算子 T 在 D_N 中至少存在着一个不动点，故系统(1)至少存在一个 ω-周期解．定理 3 证毕．

参 考 文 献

1 Wang L, Wang M Q. On periodic solution of higher order nonlinear periodic system. Ann. Diff. Eqs., 1987, 3(1): 87～110

2 王全义．一类高维周期系统的周期解．华侨大学学报(自然科学版)，1994，15(4)：363～368

3 林振声，杨信安．微分方程稳定性理论．福州：福建科学技术出版社，1988. 205～211

4 王全义．一类周期微分系统的周期解．华侨大学学报(自然科学版)，1993，14(1)：13～19

Unstable Periodic Solutions of Nonlinear Periodic Systems

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For a class of nonlinear periodic differential systems, the existence of unique and unstable solutions is studied by means of exponential dichotomy and fixed point method. Under certain conditions, some new results are obtained for confirming the existence of unique and unstable periodic solutions in these systems.

Keywords differential system, periodic solution, existence, exponential dichotomy, fixed point method