第16卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 16 No. 1
1995年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 1995

正多边形的几何作图法与解析法*

施 翠 娥

(华侨大学精密机械工程系,泉州 362011)

摘要 介绍任意等分圆周的几何作图法及所推导的解析表达式,提出用解三角形法解决正多边形零件在设计和加工中的计算问题.

关键词 几何作图法,正多边形,解析表达式

分类号 TH 126.2

在零件的图示和图案的表达等方面,常用到正多边形.在加工正多边形零件和确定圆周上均匀分布孔的圆心位置时,常遇到用几何作图法等分圆周达不到尺寸精度要求的情况.在实际工作中,需要一种能够把一个圆周任意等分的几何作图法,以及用解析法计算采用此种作图法所产生的误差大小.本文介绍可用几何作图法等分圆周的条件[1]和一种可把圆周任意等分的几何作图法[2],并据此而推导出圆心角与等分的份数之间的解析表达式.用该解析表达式可计算把圆周任意等分后,其圆心角所存在的误差,然后根据零件允许的误差,有选择性地应用该作图法.同时,在正多边形零件设计和加工中凡遇到计算问题时,可应用解三角形法以建立正多边形的几何关系[3],求出边长、外接圆和内切圆等各部分尺寸.以保证零件的尺寸精度.

1 仅用尺规把圆周 n 等分的条件

仅用尺规,任何一个正多边形能不能作图的问题,数学家高斯曾作出定论:仅用尺规把圆周 n 等分,只有当 n 是如下形状的整数时才可能.即

$n=2^m$ (m 为正整数);

$n=p=2^{2^t}+1$,且 p 为系数(t 为正整数);

$n=2^m p_1 p_2\cdots p_k$,p 是 $2^{2^t}+1$ 型的素数且各不相同.

根据这个条件,边数不超过100的正多边形,其中可以作图的如表1所示.

表1 边数不超过100的正多边形

n 的类型	正多边形的边数 n
2^m	4,8,16,32,64
$2^{2^t}+1$	3,5,17,
	6,12,24,48,96
	10,20,40,80,
$2^m p_1 p_2\cdots p_k$	15,30,60,
	34,68,
	51,85,

* 本文1994-06-04收到

2 圆周任意等分的几何作图法和解析表达式

2.1 圆周任意等分的几何作图法

如图1所示,在圆 O 中,从任一直径 AB 作一等边三角形 ACB,把直径 AB 分为 n 等分.其中,取 AD 为二等分,用线段连接 C,D 两点,并把它延长和圆周相交于 E 点,那么弧线 AE 大约等于圆周的 n 分之一.换句话说,弦 AE 就等于内接正 n 边形的一边.

2.2 解析表达式

根据上面介绍的把圆周任意 n 等分的几何作图法,可以推导出圆心角 AOE 和等分的份数 n 的解析表达式.在图2中,AB 为圆 O 的直径,$\triangle ABC$ 为等边三角形,把直径分成所要求的 n 等分数,D 点为2等分法.

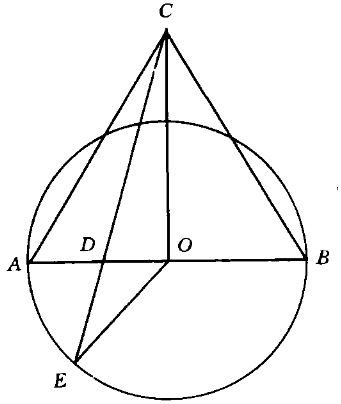


图1 把圆周任意等分的几何作图法

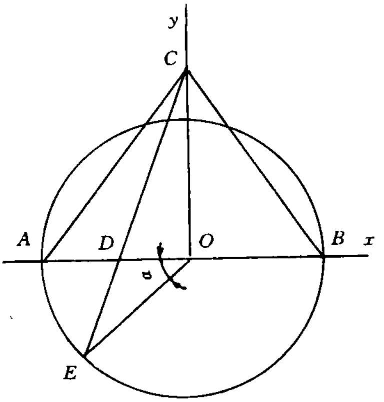


图2 圆心角和份数关系的直角坐标系

设半径 $R=\frac{AB}{2}$,$\alpha=\angle AOE$,建立直角坐标系,得

$$D(2-\frac{n}{2},0),\quad C(0,\frac{\sqrt{3}}{2}n).$$

由两点式得直线 CE 的直线方程为

$$(y-0)/(\frac{\sqrt{3}}{2}n-0)=(x-(2-\frac{n}{2}))/(0-(2-\frac{n}{2})),$$

整理即为

$$y=\frac{\sqrt{3}n}{n-4}x+\frac{\sqrt{3}}{2}n. \tag{1}$$

又设圆的方程为

$$x=\frac{n}{2}\cos\alpha,y=\frac{n}{2}\sin\alpha,(\alpha\text{ 为参数}). \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)得

$$\frac{n}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}n}{n-4}\cdot\frac{n}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}n. \tag{3}$$

整理后再除以 $\cos\alpha(\cos\alpha\neq0)$,得 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}n}{n-4}+\sqrt{3}\sec\alpha$,由 $\sec^2\alpha=1+\mathrm{tg}^2\alpha$,可整理上式后得

$2\mathrm{tg}^2\alpha+\frac{2\sqrt{3}n}{n-4}\mathrm{tg}\alpha+3-(\frac{\sqrt{3}n}{n-4})^2=0$. 解 tgα 为变量的一元二次方程为$\triangle=\frac{4\cdot 3n^2}{(n-4)^2}-8[3-(\frac{\sqrt{3}n}{n-4})^2]=4[\frac{9n^2}{(n-4)^2}-6]$，所以 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{-\frac{2\sqrt{3}n}{n-4}\pm\sqrt{4[\frac{9n^2}{(n-4)^2}-6]}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{n^2+16n-32}-n}{n-4}$ (负数不合，舍去)$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{16}{n}-\frac{32}{n^2}}-1}{1-\frac{4}{n}}$. 当 $n\to\infty$, $\frac{16}{n}\to 0$, $\frac{32}{n^2}\to 0$ 时

$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\angle AOE=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{16n^{-1}-32n^{-2}}{2}=4\sqrt{3}(n^{-1}-2n^{-2}).$$

2.3　圆周任意 n 等分的几何作图法的误差

事实上，把圆周准确地分成 n 等分，圆心角 AOE 应等于$\frac{360°}{n}$. 这个这数值和 AOE 角作一比较，可以得到因使用上述方法而发生的误差．某些 n 值的 α 值误差见表 2 所示．

表 2　α 值的误差

n	3	4	5	6	7	8	10	20	60
$360°/n$	120°	90°	72°	60°	51°26′	45°	36°	18°	6°
$\angle AOE$	120°	90°	71°57′	60°	51°31′	45°11′	36°21′	18°38′	6°26′
误差(%)	0	0	0.07	0	0.17	0.41	0.97	3.50	7.20

从表 2 可知，我们可以按所述方法把一个圆周分成 5，7，8，10 等分而不发生很大误差，误差范围为 0.07%～1.00%. 象这样的误差，在大多数实际情况下是不碍事的．但是，当分成的份数 n 增加的时侯，这个方法的精确度显著降低，即其误差显著增高．不过，n 不论增到多大，这个误差都不会超过 10%.

2.4　适用范围

由于圆周任意 n 等分的几何作图法存有误差，因此对等分圆周的几何作图法应有选择性的应用．(1) 圆的 3，6，12，…(即 3×2^m)等分和 2，4，8，16，…(即 2^m)等分的几何作图法，无论在平面划线或立体划线中都适用．虽然立体划线时，由于工件高低不平，不一定能用直尺过圆心将圆分成 2 等分，但可先用半径作弦长，将圆周 6 等分．有了 6 等分这个基准，3 等分即能作出．3×2^m 等分也能作出. 同理，3 段 6 等分弧即为圆周 2 等分，有了 2 等分，2^m 等分也能作出．(2) 圆周的 5，7 等分和任意等分近似画法，一般只适合于小型平面划线．这是因为 7 等分和任意等分画法的误差大，且在大型平面划线中，用大板尺进行多项的连续操作是很不方便的. 在立体划线中就更不适用．

3　正多边形的几何关系及其应用

3.1　几何关系

任何正多形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆，如图 3 所示．由此可得

$$\alpha=\frac{360°}{n},\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{S}{2R},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{R},\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{S}{2r}.$$

3.2　应用举例

图 4(a)是个用于冲正六方孔的冲头，在设计和加工工件时，就需通过计算，才能确定和选用最经济（多大）的圆铁直径，以及所需铣切的深度. 图4(b)所示为计算关系图. 图中$20^{+0.100}_{-0.05}$

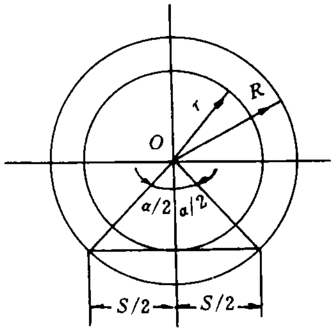
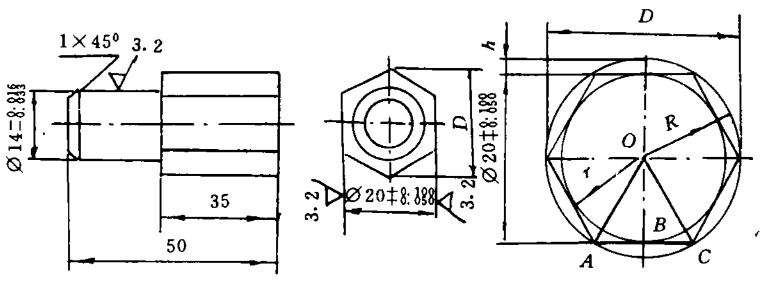


图 3　正多边形的几何关系



(a)　　(b)

图 4　正六方冲头及其计算图

是正六边形的内切圆直径 $2r$，所求的 D 为正六边形外接圆直径 $2R$. ΔAOB 是直角三角形，有 $\angle B=90°$，$\angle AOB=\frac{60°}{2}=30°$，$OB=r=\frac{20.1}{2}=10.05$，所以 $R=OA=OB\cdot\sec 30°=11.604$，$D=2R=23.208$（$D$ 为最大极限尺寸），$h=R-r=1.554$.

参　考　文　献

1　赵学禾. 平面几何作图. 天津：天津科学技术出版社，1980. 150～159

2　上海纺织工学院制图教研组. 机械制图. 上海：上海科学技术出版社，1980. 15～16

3　马忠林. 几何学. 吉林：吉林人民出版社，1982. 129～156

Geometrograph and Analytic Method for Regular Polygon

Shi　Cuie

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　For solving regular polygon, the author presents a geometrograph which divides the circumference uniformly and arbitrarily; and derives an analytic expression. It is also proposed to calculate regular polygonal parts in designing and processing by way of solving triangles.

Keywords　geometrograph, regular polygon, analytic method