第16卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 16 No. 1
1995年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 1995

B样条曲线的奇点控制*

林 瑞 麟

(华侨大学机械工程系,泉州 362011)

摘要 本文探讨三次参数曲线和B样条曲线奇点产生的机理,阐明多边形基元所确定的曲线形状,为奇点控制提供直观而方便的方法. 分析运动机构奇异情形发生的位置与终端效应系数的关系,为在机构设计中防止产生奇异提供依据.

关键词 奇点,B样条,控制,奇异性

分类号 TH 123·1

轨迹曲线的设计是个很重要的课题,它涉及到机器外型设计,数控加工的样条曲线设计各机器人的位姿轨迹曲线规划. 基于不同目的与需要,对曲线的流畅轮廓,精密的形状或位置精度就有不同的要求. 它们共同的问题是必须避免曲线出现奇点,或运动机构避免出现奇异现象. 关于这方面的研究,刘鼎元于1980年用代数方法求解三次参数曲线的奇点位置. 之后,Sugimoto,Wsldron和Litvin等人也研究了机械约束系统运动中的奇异问题,提出用逼近方法测定奇异位置[1~3],但其中有的要求条件相当苛刻,有的偏于抽象. 本文应用代数及机构学术解方法研究曲线奇点及机构奇异的控制,具有直观,简便和易于掌握的特点.

1 参数曲线分析

奇点的产生与曲线的生成有密切关系,于此分析几种常用曲线.

1.1 三次参数曲线

$$\left.\begin{aligned} X &= a_0 + a_1 t + \frac{1}{2}a_2 t^2 + \frac{1}{6}a_3 t^3, \\ Y &= b_0 + b_1 t + \frac{1}{2}b_2 t^2 + \frac{1}{6}b_3 t^3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

仿射变换,设 $p=a_2b_3-a_3b_2$,$q=a_3b_1-a_1b_3$,$r=a_1b_2-a_2b_1$. p,q,r 是向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的三个分量. 将三次参数曲线(1)写成向量形式

$$\boldsymbol{P}(t) = P_0 + P_1 t + \frac{1}{2}P_2 t^2 + \frac{1}{6}P_3 t^3. \tag{2}$$

此时 $p=[\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3]$,$q=[\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_1]$,$r=[\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2]$ 为向量分量组成的二阶行列式. 三次参数曲线段的Hermite插值表示为

* 本文1994-05-13收到;福建省自然科学基金资助项目

$$P(t)=\overrightarrow{OM_0}+t^2(3-2t)L+t(t-1)^2A_o+t^2(t-1)A_1,\tag{3}$$

式中 $L=\overrightarrow{M_0M_1}$(图 1),$A_0,A_1$ 为两端点 M_0,M_1 处的切向量．取 $\overrightarrow{M_0M}=\tau_0,\overrightarrow{MM}=\tau$ 为单位向量,则 $A_0=\lambda\tau_0,A_1=\mu\tau$. 其中 λ 和 μ 为两端点切向量的相对长度．

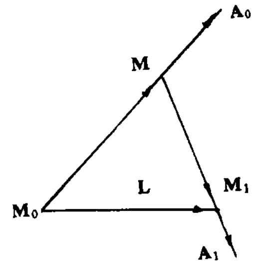

图 1　端点向量

1.2　B 样条曲线

给定 $n+1$ 个空间向量 $b_k(k=o,1,\cdots,n)$的 n 次 B 样条参数曲线

$$P_i,n(t)=\sum_{L=0}^{n}b_{i+L}F_L,n(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{4}$$

式中

$$F_L,n(t)=\frac{1}{n_!}\sum_{j=0}^{n-L}(-1)^jC_{n+1}^j(t+n-L-j)^n\quad(L=0,1,\cdots,n),$$

$$C_{n+1}^j=\frac{n!}{j!(n-j)}+\frac{n!}{(j-1)!\,[n-(j-1)]}\quad(j=0,1,\cdots,n).$$

对于二次 B 样条曲线 $n=2$,从式(4)有

$$F_{0,2}(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2,F_{1,2}(t)=\frac{1}{2}(-2t^2+2t+1),F_{2,2}(t)=\frac{1}{2}t^2.$$

$$P(t)=\sum_{L=0}^{2}b_LF_{L,2}(t)=[t^2t1]\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{bmatrix},$$

$$0\leqslant t\leqslant 1,\tag{5}$$

式(5)为写成矩阵形式的二次 B 样条曲线．

1.3　三次参数曲线段的等价表示

三次 Bézier 曲线和三次 B 样条曲线段,都是三次参数曲线段的不同表达式．从代数上看,这三种表示式可以统一在矩阵形式之下

$$P(t)=tB_ib^i,0\leqslant \mathrm{t}\leqslant 1,(i=1,2,3),\tag{6}$$

$t=[t^3t^2t1]$,$b^i=[b_0^ib_1^ib_2^ib_3^i]^T$,矩阵 $\mathrm{B}_i(i=1,2,3)$依次是

$$\begin{bmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&3&-3&1\\3&-6&3&0\\-3&3&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1&3&3&1\\3&-6&3&0\\-3&0&3&0\\1&4&1&0\end{bmatrix}.$$

$i=1$ 是通常三次参数曲线段的 Ferguson 表示式,适用于数值计算．$i=2$ 表示三次 Bézier 曲线,$[b]^2$ 表示对应的特征多边形的顶点序列．$i=3$ 为三次 B 样条曲线的一段,b^3 表示对应的 B 特征多边形顶点序列．曲线段 $P(t)$的形状完全取决于矩阵信息 b^i. 同一条三次参数曲线段 L,它的三种表示式之间可以转换,因此它们的奇点分布及控制方法是相似的．

2　三次参数曲线段的奇点判断与控制

2.1　奇点存在判断式

由相对仿射不变量

$$I = (q/p)^2 - 2r/p \tag{7}$$

可判定：$I>0$ 时，曲线有两个实拐点，而无实奇点；$I=0$ 时，曲线上出现一个尖点，而无实拐点；$I<0$ 时，曲线上出现一个二重点．

2.2　奇点位置的判断

从曲线分量 $x(t)$ 及 $y(t)$ 的各型值点序列的突变转折位置，找到对应的 t 轴上的 t_i 点为奇点位置．例如三次参数曲线段(图2)为

$$\begin{cases} x = 1.78t - \dfrac{1}{2}3.7t^2 + \dfrac{1}{2}0.4t^3, \\ y = 0.35 + 0.27t + \dfrac{1}{2}5t^2 - \dfrac{1}{6}23t^3. \end{cases}$$

取 $a_1=1.78, a_2=-3.7, a_3=0.4, b_1=0.27, b_2=5, b_3=-23$，将 (a_1,a_2,a_3) 和 (b_1,b_2,b_3) 值代入仿射变换式及式(7)可算得 $I=0$，从而判定曲线上存在一尖点．函数 $x(t)$，$y(t)$ 的型值数值为

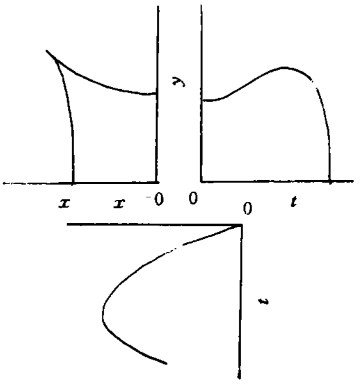

图2　三次参数曲线

t	0	0.16	0.33	0.50	0.66	0.76	0.83	0.86	1
x	0	0.238	0.388	0.436	0.390	0.315	0.242	0.208	0
y	0.35	0.442	0.574	0.631	0.516	0.318	0.106	0	

从数值序列分析中，可以确定 $t=0.5$ 为尖点位置．

2.3　奇点消除

2.3.1　**端矢量长度的调整**　由式(3)可知，当曲线段的两个端点处的切向量给定时，曲线段形状就唯一决定．不改变两端点切向量的方向，而调整其相对长度 λ,μ，便可控制曲线的形状．

当端向量 $A_0 \not\parallel A_1$ 时，不形成奇点的 λ,μ 值为：$p=[P_2P_3]>0$ 时，$0<\lambda<2$，$0<\mu<2$；$p<0$ 时，$\lambda<0$，$\mu<0$．当端向量 $A_0 \parallel A_1$ 时，只有 A_0 和 A_1 反向，曲线段上才无奇点产生．

2.3.2　**顶点位置调整**　对于用逼近方法形成的曲线，特征多边形的形状也就决定样条曲线的形状．整体特征多边形，可看成由数个特征三边形的组合，通过对特征三边形顶点位置的调整，便可改变各段曲线的形状，控制曲线段上的奇点．因此，对不同特征三边形曲线性质的分析，便可为顶点的调整提供依据．(1)凸形特征三边形(图3)，其逼近的曲线段也为凸形，没有拐点和奇点．(2)之字特征三边形，$\alpha>25^\circ$(图4)，端点 b_0,b_3 的向量 $A_0 \parallel A_3$，且反向，或 $A_0 \not\parallel A_3$ 时，无奇点，但有拐点．(3)尖咀形特征三边形，当 $\alpha>15^\circ$ 时，无奇点，无拐点；当 $5^\circ<\alpha<14^\circ$ 时有二重点；$0<\alpha\leqslant 5^\circ$ 时有尖点(图5)．(4)交叉特征三边形(图6)，设 $\overline{b_0b_1}$ 与 $\overline{b_2b_3}$ 边交于 K．当 $\overline{b_1k}/\overline{b_0k}<1/2$ 及 $\overline{b_2k}/\overline{b_3k}<1/2$ 时，无奇点．当 $\overline{b_0k}/\overline{b_1k}\doteq 1$ 及 $\overline{b_3k}/\overline{b_2k}\doteq 1$ 时，有尖点，当 $\overline{b_1k}/\overline{b_0k}>2$ 及 $\overline{b_2k}/\overline{b_3k}>2$ 时，有二重点．

3　从机构学角度分析奇异性问题

多边形顶点调整曲线段形状的机理，从机构学上来说，就是调整运动副关节的转角 θ 及调整机器人机构的姿态元素．设关节(旋转关节或柱关节)的位移向量为 θ，末端杆的角速度为 ω_n，线速度为 v_n，机器人开链机构运动方程的矩阵表达式为

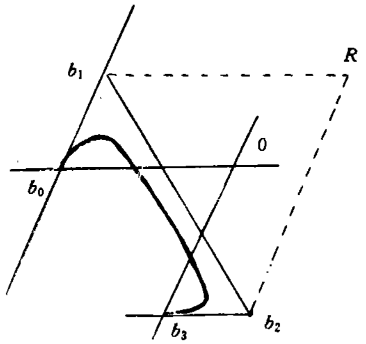

图 3　凸形曲线

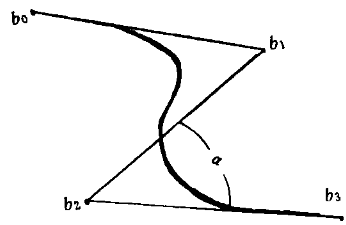

图 4　之字形曲线

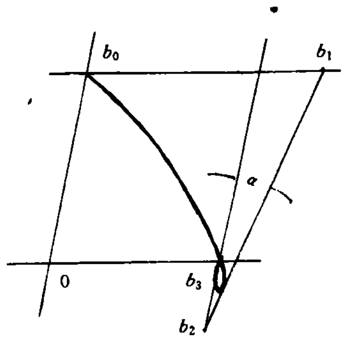

图 5　尖咀形三边形

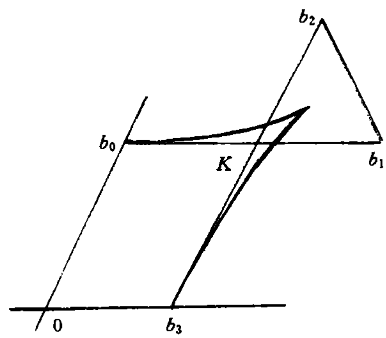

图 6　交叉形三边形

$$[\omega_n\cdots U]^{\mathrm{T}} = J[\dot\theta_1\dot\theta_2\cdots\dot\theta_n]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

式(8)可写成 $V=J\dot\theta$，$\dot\theta=[\dot\theta_1\dot\theta_2\cdots\dot\theta_n]^{\mathrm{T}}$，$J$ 为雅可比矩阵．

雅可比矩阵是机构关节位移的函数，表示机构关节速度与末端(手爪)直角坐标速度之间的线性变换关系，随着机构形态的变化，雅可比矩阵的值将有所不同．例如，Unimation puma 控制机构(图 7)有 6 个自由度，其末端第 6 节连杆为可动，其系统末端的运动方程为

$$V = J\dot\theta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta_{01} \\ \dot\theta_2 \\ \dot\theta_{23} \\ \dot\theta_{34} \\ \dot\theta_{45} \\ \dot\theta_{56} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

在式(9)中，$a_{11}=\sin(\theta_{12}+\theta_{23})\cos\theta_{34}$，$a_{12}=a_{13}=\sin\theta_{34}$，$a_{16}=\sin\theta_{45}$，$a_{21}=\sin(\theta_{12}+\theta_{23})\sin\theta_{34}$，$a_{22}=a_{23}=-\cos\theta_{34}$，$a_{31}=-\cos(\theta_{12}+\theta_{23})$，$a_{36}=-\cos\theta_{45}$，$a_{41}=-a_2\cos\theta_{12}\sin\theta_{34}+s_{12}\cos\theta_{34}\cos(\theta_{12}+\theta_{23})-s_{34}\sin\theta_{34}\sin(\theta_{12}+\theta_{23})$，$a_{42}=(a_2\sin\theta_{23})+s_{34})\cos\theta_{34}$，$a_{43}=s_{34}\cos\theta_{34}$，$s_{51}=a_2\cos\theta_{12}\cos\theta_{34}+s_{12}\sin\theta_{34}\cos(\theta_{12}+\theta_{23})+s_{34}\cos\theta_{34}\sin(\theta_{12}+\theta_{23})$，$a_{52}=(a_2\sin\theta_{23}+s_{34})\sin\theta_{34}$，$a_{53}=s_{34}\sin\theta_{34}$，$a_{61}=s_{12}\sin(\theta_{12}+\theta_{23})$，$a_{62}=-a_2\cos\theta_{23}$. 其中 a_2 为第 2 杆的长度，s_{34} 为第 3 与第 4 两运动副之间的距离．

当 J 矩阵系统的秩 $r<6$ 时，特殊位型结构的奇异公式[2]为

$$f(\theta_{34},\theta_{45},\theta_{12},\theta_{23},S_{34})=0. \tag{10}$$

由式(9),(10)得 Unimatian Puma 控制机构的奇异公式[2]为

$$a_2 s_{34}\cos\theta_{34}\sin\theta_{45}[a_2\cos\theta_{12}+s_{34}\sin(\theta_{12}+\theta_{23})]=0. \tag{11}$$

由坐标变换式 $T_{on}=T_{01}T_{12}\cdots T_{(i-1)i}\cdots T_{(n-1)n}$,可得 β_{14} 和 β_{24} 的表示(β_{KL}为相应坐标系关节轴夹角的余弦). 将式(11)变换为 $a_2\cos\theta_{12}+S_{34}\sin(\theta 12+\theta_{23})=\beta_{14}\cos\theta_{01}-\beta_{24}\sin\theta_{01})$. 因此,奇异公式由因式分解式表示为

$$\cos\theta_{23}\sin\theta_{45}(\beta_{14}\cos\theta_{01}-\beta_{24}\sin\theta_{01})=0, \tag{12}$$

分析式(12)可得到满足的情况为:(1) 当 $\cos\theta_{23}=0$ 时,机构的特殊位形发生在关节轴 S_2,S_3,并且三轴汇交;(2) 当 $\sin\theta_{45})=0$ 时,机构的特殊位形发生在关节轴 S_4,S_5,呈现连杆 4,5 平行,S_4,S_6,共轴,且三轴汇交共面;(3) 当 $\beta_{14}\cos\theta_{01}-\beta_{24}\sin\theta_{01}=0$ 时,机构的特殊位形发生在三轴汇交的交点位于 S_1 轴线上. 以上三种情况,其中任何一种得到满足时,奇异便发生.

一般开链机构由 $N(N\leqslant 6)$ 个单自由度运动副串联而成. N 个运动副变成线性无关时,终端执行器便有 N 个自由度. 然而,当机构处于某一特殊位置时,运动副中的两个或更多变成线性相关,则雅可此矩阵 J 的秩 r 下降,且存在一个或一个以上的约束反力与之相逆. 同时未端的自由度减少,机构的运动出现奇异,产生奇点.

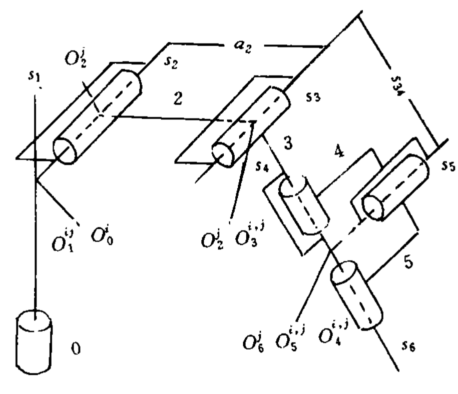

图 7 Unimation Puma 控制机构

例如某一 6R 机器人的雅可比矩阵为

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -850 & -550 & 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

从 J 中可知,第 1,4,6 列元素完全相同,这说明相应关节 1,4,6 对整体机构产生的影响完全相同. 它们变成线性相关,相当于一个关节的作用. 机器人的自由度减少到 4,其余的运动受到限制,可以说明机器人处于某些方面运动的退化. 另外,还可看到 J 阵中的第 2、3、5 行元素的值均为零,反映这 3 个元素达到极值,手爪相对于坐标系的运动保持定值,不能再作为变量,因此机构的自由度将降低而产生奇异.

从上面的分析,运动机构产生奇异的原因可归结为:(1) 运动副关节轴线之间的距离即 $\boldsymbol{H}_k$ 矢量达最小值甚至为零时,某些关节将由线性无关变成线性相关. 此时某一关节轴线可能与另一关节轴线共线,或者几个关节轴线相交并处于同一平面上,即 $\theta=0$ (或 π); (2) 终端 P 点的运动趋势为超出转角和移动的限制区域,因而达到极限的恒定值并失去了变量的作用; (3) 机构运动副中某些关节的运动失去了主动力的支配,却受到约束反力限制致使自由度下降,因此系统的运动呈现滞留现象,且执行器的运动不能执行.

为使机器人机构正常运行,必须避免产生奇异. 其方法: (1) 合理选择姿态元素,因为雅可比矩阵 J 取决于关节转角 θ,杆长 a,扭角 α 和副长 s. 因此,改进机构的构造形状,可避免关节轴线共轴或汇交(共面)的产生; (2) 规划轨迹应使终端工作点处于机器人机构的工作空间

范围内,避开极值的形成.

4 结论

(1) 三次参数曲线奇点的形成,取决于向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$及向量 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$的合理选择,为避免产生奇点,则必须满足 $I>0$.

(2) 三次B样条曲线奇点的形成与多边形的形状有,文中提供的四类特征三边形所确定的曲线形状,为多边形顶点位置调整和消除奇点提供了依据.

(3) 多边顶点位置的调整,实质上就是调整机构各运动副的转角及姿态元素.然而,转角与姿态元素的作用已归纳于雅可比矩阵 J 之中,当轨迹规划中多边形顶点设置超越许可范围,或机构元素(转角、杆长及副长等)设计不合理时,都容易使机构在运动中发生奇异现象.此时 J 的秩 r 下降,运动呈现滞留,以致不能执行规划的运动.

参　考　文　献

1 Litvin F L, Parenti C V. Singularities configurations and displacement functions of manipulators. Int. J. Robotics Res, 1986, 5(2): 52～65

2 Litvin F L, Tan J. Singularities in motion and displacement functions of constrained mechanical systems. Robotics Res, 1989, 8(2): 33～36

3 Waldron K J, Wang S L. A study of the Jacobian matrix of serial manipulators. ASME, 1985, 107(2): 230

Analysis and Control of Singular Point in B-Spline Curve

Lin　Ruilin

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstracts An analysis is made on the mechanism of the occurrence of singular point in cubic parametric curve and B-spline curve; and on the curve shape determined by polygonal basic elements. The analysis is also made on the relation between the position where singularity occurs in a motion mechanism and the coefficient of end effect. Based on these analyses, the author presents a directly perceived and convenient method for controlling singlar point; and provides a basis for preventing the occurrence of singularity in the design of constrained mechanical system.

Keywords singular point, B-splines, control, singularity