

# 双臂剪力墙结构整体稳定的 ODE 求解器解法\*

王 全 凤

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

**摘要** 提出一个用标准的常微分方程(简称 ODE)求解器求解高层双臂剪力墙结构整体稳定的特征值问题的算法,并有机地结合标准非线性问题的转换、逆幂迭代、正交化、特征值移位等几项技术措施,使得稳定特征值问题能方便地靠 ODE 求解器的功效得以精确可靠地求解。

**关键词** 整体稳定,求解器,逆幂迭代,正交化,特征值移位

**分类号** TU 398. 201

近年来,ODE 边值问题的理论研究、数值计算及程序开发等均有很大进展,典型的版本有<sup>[1]</sup>PASVA4, BOUNDS, COLSYS, SUPORT, NAGLIBRARY 等. 对标准形式的线性及非线性 ODE 边值问题,利用清华大学袁驷教授推荐的 ODE 边值问题求解器通用程序—COPYS 可直接求解<sup>[2]</sup>. 大量特殊的 ODE 边值问题可运用 ODE 变换技巧,将其标准化后,再进行求解<sup>[3]</sup>. 二维及多维的偏微分方程边值问题可采用某些离散手段将其离散为 ODE 边值问题进行有效求解<sup>[4]</sup>. H. B. Keller 在 1976 年曾提出将 ODE 特征值问题转化为标准的非线性 ODE 边值问题,然后用求解器求解这一等价的非线性问题. 80 年代, B. H. Edwards 利用该求解器成功地求解了一个单独的 ODE 首阶特征值问题<sup>[5]</sup>. 文[6]提供了一个以标准的 ODE 求解器为支撑软件的 ODE 特征值问题的求解器,使得大批 ODE 特征值问题得以方便地求解. 本文的工作是把高层双臂剪力墙结构的稳定特征方程的特征值问题转化为标准的 ODE 特征值问题求解器的标准型式,首先利用逆幂迭代法清除初始特征函数向量中其它各阶特征函数问题,再用非线性 Newton 法进行求解. 为了加快逆幂迭代的收敛速度,采用特征值移位技巧.

## 1 高层双臂剪力墙结构稳定特征值问题及其变换

以下分析将基于附图所示的双臂剪力墙结构. 双臂剪力墙的材料在整个结构高度  $H$  内部是常数,假设剪力墙之间的连梁被一个不可压缩的连续体所代替,则该结构的稳定特征方程为<sup>[7]</sup>

\* 本文 1994-04-27 收到

$$\Phi'''(z) - \bar{\alpha}^2(1 + \gamma)\Phi''(z) + \frac{q_c}{EI}[(H - z)\Phi''(z) - 2\Phi'(z) - \bar{\alpha}^2\gamma(H - z)\Phi(z)] = 0, \quad (1)$$

相应的边界条件为

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \quad \Phi''(0) = 0; \\ \Phi'(H) &= 0, \quad \Phi'''(H) + \bar{\lambda}\Phi(H) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)中  $\Phi(z) = dY(z)/dz$ ;  $Y(z)$  为结构的变形曲线;  $EI$  为剪力墙墙肢的弯曲刚度之和;  $q_0$  是临界的线分布荷载. 其它参数定义如下

$$\bar{\alpha}^2 = 12I_b^* \frac{l^2}{ha^3I}; \quad \gamma = I/I_0; \quad I = I_1 + I_2;$$

$$A = A_1 + A_2; \quad I_0 = A_1A_2 \frac{l^2}{A}; \quad I_b^* = \frac{I_b}{1 + 12EI_b/a^2GA_b}.$$

这里  $I_i$  和  $I_b$  分别是每肢墙和连梁的惯性矩;  $A_i$  是每肢

墙的断面面积;  $a$  是剪力墙洞口的宽度;  $h$  是结构的层高;  $G$  是材料的剪切弹性模量,  $A_b$  是连梁有效剪切面积;  $\bar{\lambda} = q_c/q_c$  和  $q_c = EI/H^3$ . 方程式(1), (2)为变系数 ODE, 直接求解它们的特征值问题的解析解是不可能的. 因此, 对它们分别作一些变换, 变为 ODE 求解器 COLSYS 可接受的标准 ODE 特征值问题, 再对它们作有效的求解. 首先利用区间映射(Interval Mapping)技巧<sup>[8]</sup>, 通过坐标变换将待定的求解区间映射为标准的研究区间, 使 ODE 关于新变量有了明确的定义域. 令

$$\xi = (H - z)/H, \quad 0 \leq z \leq H, \quad (3)$$

进一步有

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\xi} = \frac{d\xi}{dz} = \frac{-1}{H} \cdot \frac{d}{d\xi}, \quad 0 \leq z \leq H.$$

以上变换将待定的求解区间映射为标准的单位区间  $[0, 1]$ . 利用上述变换, 则上述方程改写为

$$\Phi'''(\xi) - \bar{\alpha}^2H^2(1 + \gamma)\Phi''(\xi) + \bar{\lambda}[\xi\Phi''(\xi) + 2\Phi'(\xi) - \bar{\alpha}^2H^2\gamma\xi\Phi(\xi)] = 0. \quad (4)$$

将坐标变换式(3)代入边界条件式(2)中, 得到相应的边界条件为

$$\Phi(1) = 0, \quad \Phi''(1) = 0; \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'''(0) + \bar{\lambda} \cdot \Phi(0) = 0. \quad (5)$$

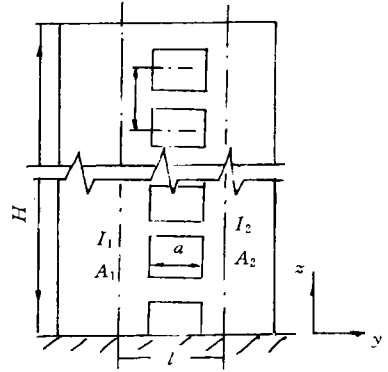
至此, 变换后的式(4)~(5)为定义在标准区间  $[0, 1]$  上的 ODE 特征值问题.

下面利用文献[8]中建议的平凡 ODE 技术及等价的 ODE 技术将上述特征值问题转化为标准的非线性 ODE 问题, 为此为特征值  $\bar{\lambda}$  建立一个平凡的 ODE, 即  $\bar{\lambda} = 0$ . 这一方面了  $\bar{\lambda}$  为常数, 另一方面将  $\bar{\lambda}$  引进到 ODE 体系中参与求解, 因而可作为解的一部分输出. 取失稳的归一化条件为

$$\int_0^1 \Phi^2(\xi) \cdot d\xi = 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (6)$$

这里取积分值为单位值作为失稳的归一化条件, 相当于 Rayleigh 商中分母取为单位值. 利用等价 ODE 技巧将上式积分化为标准 ODE 问题, 即  $R = \Phi^2(\xi)$ ,  $R(0) = 0$ ,  $R(1) = 1$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ . 这样既可以计算定积分, 即求解上式, 又可以将某些积分条件(如失稳归一化条件)化为等价的 ODE 提法而加入原问题求解.

联立以上各式, 可得到标准的非线性 ODE 形式: (1) ODE:  $\bar{\lambda}' = 0$ ,  $R' = \Phi^2(\xi)$ ,  $\Phi'''(\xi) -$



附图 双肢剪力墙

$\bar{\alpha}^2 H^2 \cdot (1+\gamma) \cdot \Phi''(\xi) = -\bar{\lambda}[\xi \cdot \Phi''(\xi) + 2 \cdot \Phi'(\xi) - \bar{\alpha}^2 H^2 \cdot \gamma \cdot \xi \cdot \Phi(\xi)]$ . (2) BC:  $\Phi'(0) = \Phi''(0) + \bar{\lambda} \cdot \Phi(0) = 0$ ,  $R(0) = 0$ ;  $\Phi(1) = \Phi''(1) = 0$ ,  $R(1) = 1$ . 可直接利用标准的 ODE 求解器为支撑软件的 ODE 特征值问题的求解器.

## 2 纯化初始特征函数向量的技术措施<sup>[6]</sup>

求解特征值问题属于非线性问题. 求解器要求在解非线性问题时先给出初始特征函数向量, 其本身对向量的选取非常敏感, 原因是提供的初始特征函数向量不可避免地包含有各阶特征函数成分. 若不对该向量先作某种处理而用作初始解, 则上述求解器算法难以保证收敛; 即使收敛, 有时也难以收敛到所需的特征值上去. 问题的关键是如何清除初始特征函数向量中其它各阶特征函数成分, 从而得到一个不包含, 至少少包含其它各阶特征函数成分的初始解, 迫使解答收敛到所需要的解上去.

### 2.1 逆幂迭代法

一般的特征值问题均可表示成为 ODE 形式, 即

$$L \cdot u(x) = \lambda M \cdot u(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (7)$$

并满足边界条件  $B_a \cdot u(a) = 0$ ,  $B_b \cdot u(b) = 0$ . 式中  $\lambda$  为特征值;  $u(x)$  为相应的  $n$  维特征函数向量;  $L, M, B_a$  和  $B_b$  均为线性微分算子矩阵, 其中  $L$  具备通常均能满足的自伴正定等性质. 把式(7)两边左乘  $L^{-1}$ , 经过第  $k-1$  次迭代后, 得

$$u^{(k)} = \lambda^{(k)} \cdot L^{-1} \cdot M \cdot u^{(k-1)}. \quad (8)$$

令  $\lambda^{(k)} = 1 / \| \bar{u}^{(k)} \|_m$ ,  $u^{(k)} = \bar{u}^{(k)} / \| \bar{u}^{(k)} \|_m$ ,  $u^{(0)} = \bar{u}$ . 则式(8)变为

$$\bar{u}^{(k)} = L^{-1} \cdot M \cdot u^{(k-1)}, \quad (9)$$

式中  $u^{(k)}$  表示下列线性 ODE 体系的解, 即

$$L \cdot \bar{u}^{(k)} = M \cdot u^{(k-1)}, \quad a \leq x \leq b; \quad B_a \cdot \bar{u}(a)^{(k)} = 0, \quad B_b \cdot \bar{u}(b)^{(k)} = 0.$$

文[9]指出  $L^{-1}$  的模数最大特征值的倒数值便是矩阵  $L$  的模数最小的特征值, 同时指出, 加大模数最大特征值与其它特征值的距离可以提高收敛速度. 所以, 逆幂迭代有很好的放大低阶, 消减高阶特征函数成份的作用. 随着迭代次数的增加,  $u^{(k)}$  收敛于  $\bar{u}^{(k)}$  中所包含的最低阶特征函数向量  $u_j$ ,  $\lambda^{(k)}$  收敛于  $\lambda_1$ . 正如本节开头所述, 为了得到一个较为纯正的特征函数向量, 我们才选用逆幂迭代, 只作少数几次逆幂迭代, 使高阶特征函数成分得基本消除或微弱地存在就中止. 然后用纯化后的这个向量作为初始解, 转向非线性的 Newton 法进行求解, 以加速收敛速度, 并保证计算精度. 本文计算证明了这一策略比单纯逆幂迭代或直接 Newton 法都更为有效.

### 2.2 正交化

为了迫使逆幂迭代收敛到第  $i$  个特征对, 采用正交化过程从假定的初始解  $\bar{u}$  中清除前  $i-1$  个特征函数成分, 即取下式作为当前逆幂迭代的初始解

$$u_i^{(0)} = \bar{u} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \cdot u_j, \quad (10)$$

其中  $\alpha_j = \frac{1}{b-a} \int_a^b u_j^T M \cdot \bar{u} dx$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ . 这样, 低阶成份由正交化过程给予消除, 而高阶成份由几次逆幂迭代加以消减, 第  $i$  阶特征函数就变成主要成分, 再转到 Newton 法就可迅速

收敛. 为了可靠起见, 这一正交化过程也可在每步逆幂迭代中进行, 以保证中间结果的纯净.

### 2.3 特征值移法

在逆幂迭代中, 当两个特征值  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  非常接近时, 收敛速度极为缓慢. 对此, 采用适当的特征值移位能极大地加速逆幂迭代的收敛, 且不改变问题的特征函数向量. 移位后的 ODE 体系为

$$L^* \cdot u = \lambda^* \cdot M \cdot u, \quad (11)$$

式中  $L^* = L - \mu M$ ,  $\lambda^* = \lambda - \mu$ ; 其中  $\mu$  为特征值移位值. 对式(11)进行逆幂迭代可很快地收敛到最接近  $\mu$  的特征值. 显然, 如何选取恰当的移位值  $\mu_i$  是个关键的问题. 最理想的选择是使这个  $\mu_i$  值与下一个特征值  $\lambda_i$  最为接近, 但由于  $\lambda_i$  值事先未知, 所以很难实现. 为了可靠和简单起见, 本文采用如下较为保守的选择  $\mu_i = 0.99\lambda_{i-1}$ . 这一简单作法在计算时非常有效, 在  $i$  变大时尤其如此.

## 3 应用算例

本节采用以 COLSYS 为支撑软件的 ODE 特征值问题求解器求解本文高层双肢剪力墙结构整体稳定. 用逆幂迭代法纯化初始特征函数向量; 用正交化消除前  $i-1$  个特征函数成分; 用特征值移位来加速逆幂迭代的收敛, 以及最后用求解器保证高精度的解答. 输给 COLSYS 的几个控制参数为 Toler(误差限) = 0.000 05; Ncolp(每个子区间的 Gauss) 配点数 = 5; Nsubi(初始配点网络子区间数) = 1. 对初始解本文统一取为

$$\Phi = z(H - z) \cdot (1 - z + z^2 + z^3).$$

此外, 对 COLSYS 还作一些改进. 在逆幂迭代时, 增加了快速处理多重右端项的功能、消除网络自动加密功能. 在前一次划分的网络上, 逆幂迭代收敛后改用 Newton 法以减少计算量. 尽管误差限 Toler 取较为严格, 逆幂迭代次数一般只需 4~5 次左右, 而转入非线性求解时只需数次 Newton 迭代, 即可收敛到满足误差限的解答. 对于高层双肢剪力墙的稳定特征问题, 用此求解器求出整个双肢剪力墙刚度系数  $\bar{\alpha}H$  的范围内的临界荷载参数  $\bar{\lambda}$ , 并与文[9]的有限差分法和文[7]的加权余量法的结果比较见附表.

附表 用不同的方法得到双肢剪力墙的临界荷载参数  $\bar{\lambda}$

方 法	$\bar{\alpha}H=1$	$\bar{\alpha}H=3$	$\bar{\alpha}H=6$	$\bar{\alpha}H=9$	$\bar{\alpha}H=14$	$\bar{\alpha}H=50$	$\bar{\alpha}H=100$
求解器方法	10.510 4	21.087 9	30.472 3	34.461 6	37.007 2	39.001 8	39.140 3
有限差分法 <sup>①</sup>	10.02 (-4.67%)	19.57 (-7.20%)	29.10 (-4.50%)	33.53 (-2.70%)	36.52 (-1.32%)	38.96 (-0.11%)	39.13 (-0.026%)
加权余量法 <sup>①</sup>	10.511 4 (0.10%)	21.100 1 (0.06%)	30.484 6 (0.04%)	34.469 7 (0.02%)	37.011 9 (0.01%)	39.003 7 (0.005%)	39.141 3 (0.003%)

① 括号内数字分别为与求解器算法结果比较的相对比值

从附表可以看出, 文[7]加权余量法算出的临界荷载参数值在整体剪力墙刚度系数值范围内都与求解器求解的结果非常接近, 相对差值全都在千分之一之内; 而文[10]有限差分法算出结果比求解器求出的结果小, 但相对差值也都在 8% 之内.

## 4 结论

ODE 特征值问题求解器是以标准的 ODE 求解器为支撑软件的,本文用它求解高层双肢剪力墙结构整体稳定的特征值问题.采用逆幂迭代、正交化和特征值移法等技术措施,得到的结果与用其它两种不同方法得到的近似结果吻合得很好.除显示该求解器解法具有数值精确解精度的效能之外,还证实了文[7]用加权余量法计算高层双肢剪力墙结构临界荷载的方法是可行的.

## 参 考 文 献

- 1 Ascher U, Russell R D. Reformulation of boundary value problem into standard form. SIAM Rev., 1981, (23): 238~254
- 2 袁 驷. 介绍一个常微分方程边值问题求解通用程序——COLSYS. 计算结构力学及其应用, 1990, 7(2): 104~105
- 3 Yuan S. ODE conversion techniques and their applications in computational mechanics. Acta Mechanica Sinica, 1991, 7(3): 283~288
- 4 袁 驷. 计算力学的有限元线法. 力学进展, 1992, 22(2): 208~216
- 5 Edwards B H. Computation of eigenvalues using two-point boundary value problem codes. Int. J. Numer. Math. in Engrg, 1982, (18): 1736~1738
- 6 王全凤. 高层双肢剪力墙结构整体稳定的加权余量法. 建筑结构学报, 1993, 14(1): 54~62
- 7 袁 驷. 常微分方程技术及其在固体力学计算中的应用. 力学学报, 1991, 24(1): 109~115
- 8 南京大学数学计算力学专业教研室. 线性代数计算方法. 北京: 北京科学出版社, 1979. 59~60
- 9 Rutenberg A, Leviathan I, Decalo M. Stability of sheat wall structure. J. of the Struct. Div., ASCE, 1988, 114(3): 707~716

## Solving the Overall Stability of a Structure with Coupled Shear Walls by an ODE Solver

Wang Quanfeng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** For solving the overall stability of a tall building with coupled shear walls by a standard ODE (ordinary differential equation) solver, the author proposes an algoritym for solving eigenvalue problem. The algorithm integrates into itself such technical measures as standard transform of nonlinear problem, iteration of inverse-power, orthogonalisation, and eigenvalue displacement. With this algorithm, eigenvalue problem can be solved by ODE solver accurately and reliably.

**Keywords** overall stability, solver, iteration of inverse-power. orthogonalisation, eigenvalue displacement