

平面刚架弹塑性稳定的一种数值方法*

林 赞 生

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

摘要 在等截面杆件稳定问题理论解的基础上, 提出结构进入弹塑性阶段其变刚度杆件的位移模式, 并基于虚功原理导出了弹塑性单元的切线刚度矩阵, 其精确度为95%。

关键词 稳定, 弹塑性, 刚架, 数值方法

分类号 TU 313.3

随着高强轻质材料的发展, 建筑物高度的不断增加, 结构的整体与局部稳定以及二阶效应的研究, 已经引起了学术界的关注. 在刚架的稳定性方面, 可以建立杆件稳定问题的控制微分方程, 并得到常截面^[1,2]或线性变截面杆件^[3]的位移精确解. 这些解答能精确地考虑几何非线性的影响, 以及H型钢杆件在线性分布弯矩下所引起的物理非线性的影响^[3]. 由于杆单元在考虑轴力引起的二阶效应时, 弯矩分布通常是复杂的曲线, 因此对不同截面形式的杆件, 塑性区域的分布和发展情况需要采用更合理的模型, 但目前尚缺少精确可靠的物理模型. 本文在弹性稳定性解答的基础上, 提出进入弹塑性阶段杆件的位移模式, 用高斯积分点处的截面刚度代表杆件的刚度变化, 较为精确地考虑结构的几何非线性和物理非线性的效应. 计算中采用以下基本假定: (1) 杆件在变形前后, 截面保持平面; (2) 按小变形理论计算; (3) 不计剪切变形, 以及剪应力对塑性区的影响; (4) 材料为理想弹塑性体, 不发生应力卸载.

1 弹性单元刚度矩阵

对无节间荷载的弹性杆件, 承受压力 p 作用如图1所示, 其控制微分方程为^[1]

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + p \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{p}{EA}. \quad (2)$$

令 $k^2 = pI^2/EI$, 方程(1)的通解为

$$v(x) = A \sin \frac{kx}{l} + B \cos \frac{kx}{l} + Cx + D. \quad (3)$$

* 本文1994-08-17收到

不计横向位移 v 对纵向位移 u 的影响, 单元的杆端力与杆端位移的关系为^[2]

$$\bar{F} = \bar{K} \bar{\delta}, \quad (4)$$

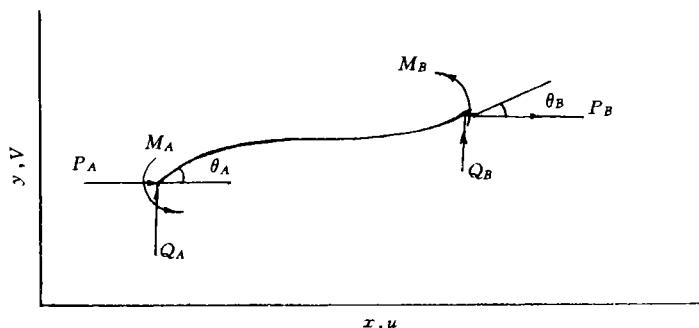


图1 杆端力与杆端位移

其中 $\bar{F} = \{P_A \ Q_A \ M_A \ P_B \ Q_B \ M_B\}^T$, $\bar{\delta} = \{u_A \ v_A \ \theta_A \ u_B \ v_B \ \theta_B\}^T$, 以及

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 & -a_1 & a_3 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & -a_3 & a_4 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & -a_3 & 0 & a_1 & -a_3 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 & -a_3 & a_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

在式(5)中, 有

$$a_1 = \frac{EI}{l^3} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{k}{2}}{\operatorname{tg} \frac{k}{2} - \frac{k}{2}} - 1 \right) k^2,$$

$$a_2 = \frac{EI}{l} \left(\frac{1 - k \operatorname{ctg} k}{2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} - k} \right) k,$$

$$a_3 = \frac{EI}{l^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{k}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} - k} \right) k^2,$$

$$a_4 = \frac{EI}{l} \left(\frac{k - \sin k}{2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} - k} \right) \frac{k}{\sin k}.$$

2 弹塑性单元切线刚度矩阵

当结构进入弹塑性阶段, 部分杆件出现了塑性区域. 由弹性区求得的惯性矩 $I_y(x)$, 沿杆

长的变化情况如图 2 所示.

对于变刚度区段 AB (或 CD), 长度为 l' , 受压力 p 作用. 求位移曲线的精确解是困难的, 我们假定, 在外荷载增量作用下, 位移曲线的增量 $v(x)$ 具有与式(3)相同的形式. 即

$$v(x) = A \sin \frac{k'x}{l'} + B \cos \frac{k'x}{l'} + CX + D, \quad (6)$$

式中

$$k' = l' \sqrt{p/EI'},$$

而 EI' 为比拟常截面杆件的刚度, 由变截面杆件与比拟常截面杆件的变形能相等来确定. 即

$$EI' = \frac{\int_r EI_y(x) \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_r \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx}, \quad (7)$$

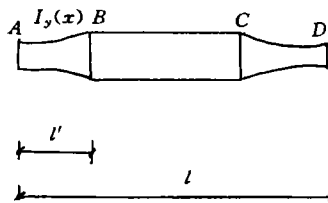


图 2 弹塑性杆的弹性刚度

待定参数 A, B, C, D , 由结点位移增量 $\bar{\delta}_m = \{v_A \theta_A v_B \theta_B\}^T$ 表示为 $\{A \ B \ C \ D\}^T = G^{-1} \bar{\delta}_m$, 其中

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k'/l' & 0 & 1 & 0 \\ \sin k' & \cos k' & l' & 1 \\ k' \cos k'/l' & -k' \sin k'/l' & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

式(6)可改写为

$$v(x) = N(x) \bar{\delta}_m, \quad (8)$$

其中 $N(x) = [\sin \frac{k'x}{l'} \cos \frac{k'x}{l'} x \ 1] G^{-1}$. $v(x)$ 的各阶导数可表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= N'(x) \bar{\delta}_m = \alpha \bar{\delta}_m, \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= N''(x) \bar{\delta}_m = \beta \bar{\delta}_m, \\ \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 &= \bar{\delta}_m^T \alpha^T \bar{\delta}_m, \\ \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 &= \bar{\delta}_m^T \beta^T \beta \bar{\delta}_m. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

把式(9)代入式(7), 可得

$$EI' = \frac{\int_r EI_y(x) \bar{\delta}_m^T \beta^T \beta \bar{\delta}_m dx}{\int_r \bar{\delta}_m^T \beta^T \beta \bar{\delta}_m dx}. \quad (10)$$

式(10)需用迭代求解, 迭代过程中取结点位移 $\bar{\delta}_m$ 为上一轮的计算值. 由杆件稳定问题的虚功方程⁽⁴⁾得

$$\bar{\delta}_m^T \bar{K}_m \bar{\delta}_m = \int_r EI_y(x) \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx - p \int_r \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx, \quad (11)$$

把(9)式代入并整理后得

$$\bar{K}_m = \int_r EI_y(x) \beta^T \beta dx - p \int_r \alpha^T \alpha dx. \quad (12)$$

式(1)及式(12)中各元素均由高斯积分求得,因此由高斯积分点处截面的 $EI_y(x)$ 代表杆件截面的变化. 杆端力增量与杆端位移增量的关系可表示为

$$\bar{K}_{ep} \delta_m = \bar{F}_m, \quad (13)$$

式中

$$\bar{K}_{ep} = \begin{bmatrix} \frac{EA'}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA'}{l} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} & k_{14} \\ 0 & k_{21} & k_{22} & 0 & k_{23} & k_{24} \\ -\frac{EA'}{l} & 0 & 0 & \frac{EA'}{l} & 0 & 0 \\ 0 & k_{31} & k_{32} & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & k_{41} & k_{42} & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$k_{ij} = \int_r EI_y(x) \beta_i \beta_j dx - p \int_r \alpha_i \alpha_j dx \quad (i = 1 \sim 4, j = 1 \sim 4)$, $A' = l' / \int_r \frac{1}{A_y(x)} dx$, ($A_y(x)$ 为弹性截面积). 至此,得到弹性区段 BC 和弹塑性区段 AB (或 CD) 的单元刚度矩阵(5)和(14),可用子结构方法组成图 2 所示弹塑性杆 AD 的单元切线刚度^[3].

3 弹塑性截面切线刚度

由前面已知,对于弹塑性杆件,需要确定塑性区域,以便由弹性区计算高斯积分点处截面的惯性矩 I_y 和截面积 A_y .

对于任意截面形式的杆件,塑性区域可由下列方程组确定^[5]. 即

$$\left. \begin{aligned} \int_A \sigma dA &= -P, \\ \int_A \sigma y dA &= M, \\ \epsilon &= \epsilon_c + \Phi y + \epsilon_r, \\ \sigma &= f(\epsilon). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中 ϵ_c 为截面形心处的平均应变; ϵ_r 为截面上的残余应变; Φ 为截面的曲率; y 为微面积 dA 至截面形心的距离; M, P 分别为作用于截面上的弯矩和轴压力.

对于理想弹塑性材料, σ - ϵ 曲线如图 3 所示.

4 结构整体分析

有了单元刚度矩阵(5), (14)后,通过坐标变换和利用结点的平衡条件,便可得到结构的总刚度矩阵. 在弹性阶段,可建立整体结构的结点力与结点位移的关系为

$$KD = P. \quad (16)$$

由于总刚度矩阵 K 中含有未知轴力 p_i , 故需经过迭代求解,才能得到与荷载相应的位移. 此时迭代收敛的条件为:前后两次迭代所得到的轴力的相对误差小于 10^{-3} .

在弹塑性阶段,可建立整体结构的结点力增量与结点位移增量的关系为

$$K_p \Delta D = \Delta P. \quad (17)$$

式(17)的求解,需与弹性阶段一样采用迭代法. 同时在每轮迭代中,应根据各杆件塑性区的情况,不断修正总刚度矩阵,从而得到每级荷载增量下的位移增量(图 4).

当结构总刚度矩阵由正变负时,可认为刚架已经失稳. 因此,上一级荷载就定义为刚架的极限承载力.

5 算例分析

选择已有承载力试验结果^[3]的刚架,如图 5 所示. 图中,柱截面尺寸为 12 mm × 20 mm, 梁截面尺寸为 12 mm × 30 mm. 其加载过程,应先加竖向荷载,然后逐级增加水平荷载,直到破坏.

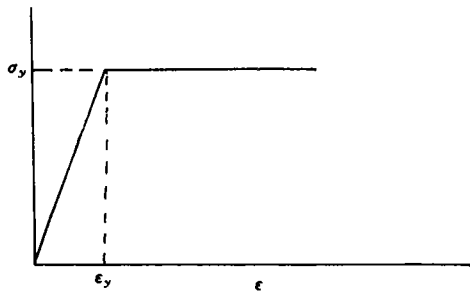


图 3 σ - ϵ 曲线

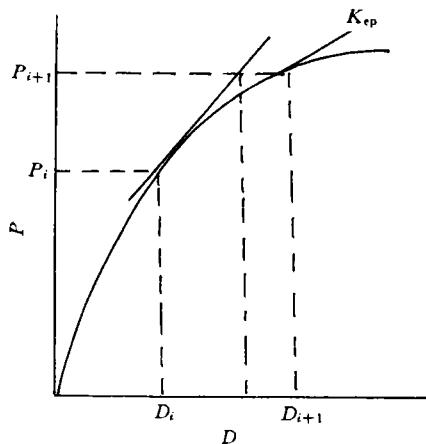


图 4 荷载增量与位移增量的关系

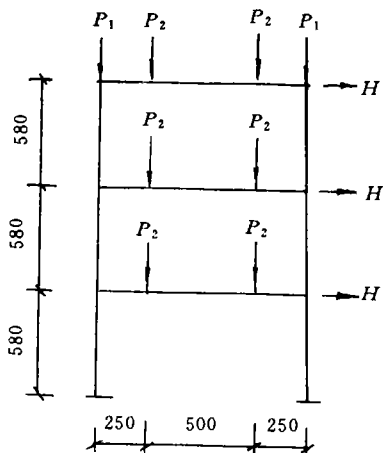


图 5 计算刚架

竖向荷载分为三种情况,对应不同的轴压比. 图 6 给出了在这三种荷载下,刚架顶点位移与水平荷载 H 的关系. 图中圆数据点为文[3]的试验结果,曲线 1 为不考虑轴力效应的一阶弹塑性分析值,曲线 2(实线)为本文计算结果.

从实例分析不难看出,本文的计算结果与试验结果符合良好,这说明本文的方法具有较高的精度.

6 结束语

(1) 本文在弹性解的基础上,提出了弹塑性杆件的位移模式. 计算结果与试验结果符合良好,说明本文方法能较好地体现几何非线性和物理非线性效应.

(2) 本文方法适用于各种截面形式的框架. 对于强化材料,有待于作进一步研究.

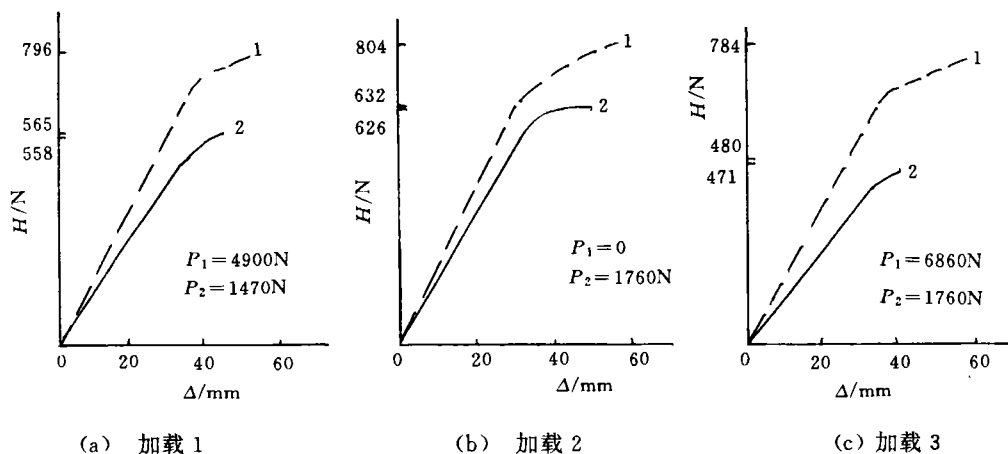


图6 荷载位移曲线

本文为校级科研基金资助项目。

参 考 文 献

- 1 Simitses G J, Gori J. Non-linear analysis of unbraced frames of variable geometry. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1982, 17(1): 47~61
- 2 方德平, 林赞生, 陈 铨. 平面刚架稳定问题的一种非线性分析方法. *华侨大学学报(自然科学版)*, 1992, 13(3): 358~366
- 3 丁洁民, 深祖炎. 多层及高层钢刚架的弹塑性稳定. *同济大学学报*, 1989, 17(2): 149~160
- 4 华东水利学院结构力学教研组. *结构力学: 下册*. 北京: 水利电力出版社, 1983. 212~238
- 5 吕烈武, 沈世剑, 沈祖炎等. *钢结构构件稳定理论*. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983. 43~91

A Numerical Method for Computing the Elastoplastic Stability of Plane Rigid Frame

Lin Zansheng

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A displacement model of bar with variable rigidity, applicable to the structure entering into elastoplastic level, is presented. It is based on theoretical solution to the stability of bar with constant section. A tangent rigidity matrix of elastoplastic unit is also derived on the basis of virtual work principle. The method is indicated by calculating example to be of higher accuracy.

Keywords stability, elastoplasticity, rigid frame, numerical method