第16卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.16 No.1
1995年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 1995

对称蛙跳格式的稳定性分析*

陈思雄 曾文平

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 利用待定系数法,建立了解色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的若干蛙跳型对称差分格式. 其中稳定性最好的格式稳定性条件是 $|R|\leqslant 3.2470$. 此外,得到一个高精度蛙跳型对称显格式的截断误差为 $O(\tau^2+h^6)$,但其稳定性条件仅为 $|R|\leqslant 0.162\ 08$.

关键词 蛙跳型对称显式差分格式,稳定性分析,色散方程.

分类号 O 241.84

对于色散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \tag{1}$$

已有许多数值解法,其中 a 为常数,可正可负. 在文〔1〕中提出一个具有对称性的条件稳定的显式格式,即青蛙跳格式

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+R\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}, \tag{2}$$

它是三层对称显式格式,计算也简单,但稳定性条件较苛刻,要求 $|R|\leqslant 2\sqrt{3}/9=0.384\ 9$ (其中 $R=a\tau/h^3$). 随后文〔2〕提出格式(2)的双步长格式,其稳定性条件为 $|R|\leqslant 3.079\ 2$.

所以利用待定系数法,建立了若干具有高稳定性的蛙跳型差分格式,均是三层对称的显式格式,也是格式(2)的推广,包含了具有高稳定性的同类型差分格式,并得到一些新的格式. 稳定性最好的格式是(24a). 其稳定性条件是 $|R|\leqslant 3.247\ 0$. 本文所构造的对称蛙跳格式的特点是无论色散方程系数是 $a>0$ 或 $a<0$ 都可以用同一格式进行计算,不仅方便,而且便于推广至非线性方程. 同时也得到一个高精度蛙跳型对称显格式(26),其截误差为 $0(\tau^2+h^6)$,但稳定性条件仅为 $|R|\leqslant 0.162\ 08$.

当利用 Fourier 分析法研究我们所构造的三层对称的显式格式时,把 $u_m^n=Z^n e^{im\theta}$ 代入差分格式(13)时,得到如下形式的特征方程

$$Z^2-2iRG(\theta)Z-1=0, \tag{3}$$

其中 $G(\theta)$ 为 θ 的函数. 由 Miller 准则可知相应差分格式的稳定性条件为

$$|R|<\inf_{\theta\in(0,\pi)}\frac{1}{|G(\theta)|}. \tag{4}$$

(注意到对差分格式(12)而言,$G(\theta)$ 具有(13)的形式,而正弦函数为奇函数,故只考虑 $\theta\in(0,$

---

* 本文 1994-08-29 收到; 国家教委留学生基金资助项目

π). 为简便计，今后在写类似不等式时将略去 $\theta\in(0,\pi)$.

1 差分格式的构造

取时间步长为 τ，空间步长为 h，且用 $\overline{u}_{m\pm k}^{n\pm l}$ 及 $u_{m\pm k}^{n\pm l}$ 分别表示在网格点 $(x\pm kh,\ t\pm l\tau)$ 处方程(1)的解及相应差分格式的解，并记

$$\delta_{kx}\overline{u}_m^n = \overline{u}_{m+k}^n - \overline{u}_{m-k}^n, \tag{5}$$

其中 $k=0,1,2,3,4$；$l=0,1$.

为建立差分格式，需要如下两个 Taylor 展开式

$$\frac{1}{\tau}\{\overline{u}_m^{n+1} - \overline{u}_m^{n-1}\} = 2\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right)_m^n + \frac{1}{3}\tau^2\left(\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial t^3}\right)_m^n + 0(\tau^4), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^3}\{\alpha_1\delta_x + \alpha_2\delta_{2x} + \alpha_3\delta_{3x} + \alpha_4\delta_{4x}\}\overline{u}_m^n &= \frac{1}{h^3}\{2(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4)h\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)_m^n \\ &+ \frac{1}{3}(\alpha_1 + 8\alpha_2 + 27\alpha_3 + 64\alpha_4)\left(\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial x^3}\right)_m^n + \frac{h^5}{60}(\alpha_1 + 32\alpha_2 + 243\alpha_3 + 102\,4\alpha_4)\left(\frac{\partial^5\overline{u}}{\partial x^5}\right)_m^n \\ &+ \frac{h^7}{252\,0}(\alpha_1 + 128\alpha_2 + 218\,7\alpha_3 + 163\,84\alpha_4)\left(\frac{\partial^7\overline{u}}{\partial x^7}\right)_m^n\} + 0(h^6),\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为待定实常数．所以

$$\begin{aligned}\Delta_h\overline{u}_m^n &\triangleq \frac{1}{\tau}(\overline{u}_m^{n+1} - \overline{u}_m^{n-1}) - \frac{a}{h^3}(\alpha_1\delta_x + \alpha_2\delta_2x + \alpha_3\delta_3x + \alpha_4\delta_4x)\overline{u}_m^n \\ &= 2\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right)_m^n - \frac{a}{3}(\alpha_1 + 8\alpha_2 + 27\alpha_3 + 64\alpha_4)\left(\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial x^3}\right)_m^n + \frac{1}{3}\tau^2\left(\frac{\partial^3\overline{u}}{\partial t^3}\right)_m^n \\ &- \frac{2a}{h^2}(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4)\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)_m^n - \frac{h^2}{60}a(\alpha_1 + 32\alpha_2 + 243\alpha_3 + 102\,4\alpha_4) \\ &\times\left(\frac{\partial^5\overline{u}}{\partial x^5}\right)_m^n - \frac{h^4a}{252\,0}(\alpha_1 + 128\alpha_2 + 218\,7\alpha_3 + 163\,84\alpha_4)\left(\frac{\partial^7\overline{u}}{\partial x^7}\right)_m^n + O(\tau^2 + h^6).\end{aligned} \tag{8}$$

因此，我们有

1° 为保证差分格式的相容性[3]应使截断误差达到 $O(\tau^2+h^2)$，需取

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0,\ \alpha_1 + 8\alpha_2 + 27\alpha_3 + 64\alpha_4 = 6. \tag{9}$$

这时有两个参数可供自由选取．

2° 如果截断误差欲达到 $O(\tau^2+h^4)$，还应加上

$$\alpha_1 + 32\alpha_2 + 243\alpha_3 + 102\,4\alpha_4 = 0, \tag{10}$$

这时只有一个参数可供自由选取．

3° 如果截断误差欲达到 $O(\tau^2+h^6)$，则还应再加上

$$\alpha_1 + 128\alpha_2 + 218\,7\alpha_3 + 163\,84\alpha_4 = 0, \tag{11}$$

这时方程组(9)～(11)只有唯一解

$$\alpha_1 = \frac{-488}{120},\ \alpha_2 = \frac{338}{120},\ \alpha_3 = \frac{-72}{120},\ \alpha_4 = \frac{7}{120}, \tag{12}$$

舍去余项便得蛙跳型对称显式格式如下

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + R\{\alpha_1\delta_x + \alpha_2\delta_{2x} + \alpha_3\delta_{3x} + \alpha_4\delta_{4x}\}u_m^n. \tag{13}$$

这一类格式中间层(即第 n 层)网格点的分布是对称的,且当 $\alpha_3=\alpha_4=0$ 时有唯一解 $\alpha_1=-2$,$\alpha_2=1$,即得到蛙跳格式(2),从而格式(13)可视为蛙跳型显格式的推广.

差分格式(13)的特征方程为(3)型,其中

$$G(\theta)=\alpha_1\sin\theta+\alpha_2\sin2\theta+\alpha_3\sin3\theta+\alpha_4\sin4\theta. \tag{14}$$

注意到条件(8),则其稳定性条件(4)可写为

$$|R|=\inf(|(\cos\theta-1)\{8\alpha_4\cos^2\theta+(4\alpha_3+8\alpha_4)\cos\theta-(\alpha_1-\alpha_3)\}\sin\theta|)^{-1}. \tag{15}$$

2 稳定性分析

1° $\alpha_4=0$,$\alpha_1=-2+5\eta$,$\alpha_2=1-4\eta$,$\alpha_3=\eta\neq0$ (η 为常数),此为七点格式

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+R\{(-2+5\eta)\delta_x+(1-4\eta)\delta_{2x}+\eta\delta_{3x}\}u_m^n, \tag{16}$$

其稳定性条件为

$$|R|=\inf(4\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}|1-4\eta\sin^2\frac{\theta}{2}|)^{-1}. \tag{17}$$

考虑几种特殊情况:

(A) $\alpha_3=\eta=1/4$,$\alpha_1=-3/4$,$\alpha_2=0$,这时我们得到一个简单的格式

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+\frac{R}{4}\{-3(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)+(u_{m+3}^n-u_{m-3}^n)\}, \tag{16a}$$

其稳定条件为

$$|R|<\inf\frac{4}{|3\sin\theta-\sin3\theta|}=\inf\frac{1}{\sin^3\theta}=1\quad(\theta=90°).$$

显然,稳定条件优于蛙跳格式(2),但它为七点格式.

(B) 当 $\alpha_3=\eta=0.3620298$,$\alpha_1=-0.189851$,$\alpha_2=-0.4481194$,此即文[2]中格式(1.6)当 $b_0=-0.5244063$ 的情况,为该类七点格式中稳定区域最大者,其稳定区域为 $|R|\leqslant1.5067459$,其格式记为(16b).

(C) 当 $\alpha_3=\eta=-\frac{1}{4}$,$\alpha_1=\frac{-13}{4}$,$\alpha_2=2$,此时截断误差阶达 $O(\tau^2+h^4)$,其格式为

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+\frac{R}{4}\{-13(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)+8(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)-(u_{m+3}^n-u_{m-3}^n)\}, \tag{16c}$$

其稳定条件为

$$|R|=\inf\frac{1}{4\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}(1+\sin^2\frac{\theta}{2})}\doteq0.21697\quad(\theta=126.2043°).$$

2° $\alpha_3=0$,$\alpha_1=-2+16\eta$,$\alpha_2=1-10\eta$,$\alpha_4=\eta\neq0$,此为九点格式

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+R\{(-2+16\eta)\delta_x+(1-10\eta)\delta_{2x}+\eta\delta_{4x}\}u_m^n, \tag{18}$$

其稳定条件为

$$|R|=\inf(2|(\cos\theta-1)\{4\eta\cos^2\theta+4\eta\cos\theta+1-8\eta\}\sin\theta|)^{-1}. \tag{19}$$

讨论下列几种特殊情况:

(A) $\alpha_4=\eta=0.1$,$\alpha_1=-0.4$,$\alpha_2=0$,这时有简单格式

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{10}\{-4(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) + 8(u_{m+4}^n - u_{m-4}^n)\}. \tag{18a}$$

这时稳定条件为

$$|R| < \inf \frac{10}{4\sin\theta - \sin 4\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{2(5-\sqrt{5})} \doteq 2.102\,9 \quad (\theta = 72°),$$

其稳定条件又优于(16a)，但它为九点格式.

(B) $\alpha_4=\eta=1/8$，$\alpha_1=0$，$\alpha_2=-2/8$，其格式为

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{8}\{-2(u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) + (u_{m+4}^n - u_{m-4}^n)\}. \tag{18b}$$

由附录(略去)讨论可知它为(2)型差分格式中稳定性条件最优的格式，其稳定条件为

$$|R| < \inf \frac{8}{|2\sin 2\theta - \sin 4\theta|} = \inf \frac{1}{\sin^3\theta|\cos\theta|} = \frac{16}{9}\sqrt{3} \doteq 3.079\,2 \quad (\theta = 60°).$$

事实上，它即为文[2]中的双步长格式(3.4).

(C) $\alpha_4=\eta=-1/24$，$\alpha_1=-8/3$，$\alpha_2=17/12$，此格式为

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{24}\{&-64(u_{m+1}^n - u_{m-2}^n) \\ &+ 34(u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) - (u_{m+4}^n - u_{m-4}^n)\}, \end{aligned} \tag{18c}$$

其稳定条件为

$$|R| = \inf \frac{3}{|(\cos\theta - 1)(\cos^2\theta + \cos\theta - 8)\sin\theta|} = \frac{48\sqrt{3}}{297} \doteq 0.279\,9 \quad (\theta = 120°).$$

3° 当 $\alpha_2=0$，$\alpha_1=\eta$，$\alpha_3=-\dfrac{4+10\eta}{14}$，$\alpha_4=\dfrac{3+4\eta}{14}$，此亦为九点格式

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{14}\{14\eta\delta_x - (4+10\eta)\delta_{3x} + (3+4\eta)\delta_{4x}\}u_m^n, \tag{20}$$

其稳定条件为

$$|R| = \inf \frac{7}{2|(\cos\theta - 1)\{2(3+4\eta)\cos^2\theta + (2-2\eta)\cos\theta - (6\eta+1\}\sin\theta|}. \tag{21}$$

仅考虑如下两种情况：

(A) 当 $\eta=-0.262\,09$ 时，其稳定性条件为 $|R|<2.851\,4$，由附录(略去)可知，此为九点格式(20)中稳定性范围最大者，其格式称为(20a).

(B) 当 $\alpha_1=\eta=-5/4$，$\alpha_3=17/28$，$\alpha_4=-2/14$，其截断误差达 $O(\tau^2+h^4)$，其格式为

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{28}\{&-35(u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) \\ &+ 17(u_{m+3}^n - u_{m-3}^n) - 4(u_{m+4}^n - u_{m-4}^n)\}, \end{aligned} \tag{20b}$$

其稳定条件为

$$|R| = \inf \frac{7}{|(\cos\theta - 1)(8\cos^2\theta - 9\cos\theta - 13)\sin\theta|} \doteq 0.531\,72. \ (\theta = 80.526\,4°).$$

4° 当 $\alpha_1=0$，$\alpha_2=\eta$，$\alpha_3=-\dfrac{4+16\eta}{14}$，$\alpha_4=\dfrac{3+5\eta}{14}$，其格式为

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{14}\{14\eta\delta_{2x} - (4+16\eta)\delta_{3x} + (3+5\eta)\delta_{4x}\}u_m^n, \tag{22}$$

稳定性条件为

$$|R| = \inf \frac{7}{2|(\cos\theta - 1)\{2(3 + 5\eta)\cos^2\theta + (2 - 6\eta)\cos\theta - (1 + 4\eta)\}\sin\theta|}. \quad (23)$$

(A) 当 $\eta=\frac{3\times 91}{5\times 294}\doteq -0.185\,714\,2$ 时,由附录(略去)可知此为格式(22)中稳定范围最大者,也是该类九点格式中稳定范围最大者,其稳定性条件为 $|R|<3.247\,0$,其格式称为(22a).

(B) 当 $\eta=\alpha_2=-70/56$, $\alpha_3=64/56$, $\alpha_4=-13/56$, 截断误差达 $O(\tau^2+h^4)$, 格式为

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{56}\{-70(u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) + 64(u_{m+3}^n - u_{m-3}^n) - 13(u_{m+4}^n - u_{m-4}^n)\}, \quad (22b)$$

其稳定条件为

$$|R| = \inf \frac{7}{|(\cos\theta - 1)(13\cos^2\theta - 19\cos\theta - 8)\sin\theta|} \doteq 0.409\,2. \ (\theta = 147.460\,5°).$$

5° 当 $\alpha_1=\frac{-488}{120}$, $\alpha_2=\frac{338}{120}$, $\alpha_3=\frac{-72}{120}$, $\alpha_4=\frac{7}{120}$, 其截断误差最高,达到 $O(\tau^2+h^6)$,这时有高精度差分格式

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{120}\{-488\delta_x + 338\delta_{2x} - 72\delta_{3x} + 7\delta_{4x}\}u_m^n, \quad (24)$$

其稳定性条件为

$$|R| = \inf \frac{15}{|(\cos\theta - 1)(7\cos^2\theta - 29\cos\theta + 52)\sin\theta|} \doteq 0.162\,08 \quad (\theta = 130.486\,964°). \quad (25)$$

3 格式的比较

1° 五点蛙跳格式(2)的稳定性条件为 $|R|\leqslant 0.384\,9$; 七点格式中以格式(16a)最简单,其稳定性条件为 $|R|\leqslant 1$,而以格式(16b)的稳定性条件最好,为 $|R|\leqslant 1.506\,745\,9$, 但结构稍微麻烦些; 九点格式中,以格式(22a)的稳定性条件最好,为 $|R|\leqslant 3.247\,0$,优于双步长格式(18b)的 $|R|\leqslant 3.079\,2$. 由此可见,随着点区间的扩大,其稳定性条件也跟着放宽. 因而当区间给定时,如何构造稳定性条件最好的差分格式,特别是显式格式,是一个值得探讨的问题. 利用待定系数法,不难构造涉及更多中间层点数而稳定性更好的蛙跳型对称显格式. 例如,不难证明下列两个差分格式

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{32}\{-(u_{m+2}^n - u_{m-2}^n) + (u_{m+6}^n - u_{m-6}^n)\} \quad (26)$$

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} + \frac{R}{27}\{-3(u_{m+3}^n - u_{m-3}^n) - (u_{m+6}^n - u_{m-6}^n)\} \quad (27)$$

的稳定条件分别为 $|R|\leqslant 8$ 及 $|R|\leqslant 27\times\frac{2}{9}\sqrt{3}=6\sqrt{3}=10.392\,3$. (事实上,它们分别是格式(16a)的双步长格式及格式(2)的三步长格式). 公式(26),(27)的区间较大是缺点,而其稳定范围大则为其优点. 实际问题中取用哪一种格式,应视具体问题而定,不可一概而论.

2° 本文所建立的格式,其截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$,较高者达 $O(\tau^2+h^4)$, 其中以七点格式

(16c)的稳定性条件 $|R|\leqslant 1.2566049$ 为最好；截断误差达 $O(\tau^2+h^6)$ 的显格式只有格式(24)，其稳定性条件 $|R|\leqslant 0.16208$ 较苛刻．

3° 本文所建立的差分格式，都是三层显格式，除了初始层数值已知外，还必须用其他方法(例如用文〔1〕中的两层格式)预先算出第一层上的网格函数值．

4° 为便于应用，下面列出表 1. 表中格式为格式(13)，即

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+R\{\alpha_1(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)+\alpha_2(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)$$
$$+\alpha_3(u_{m+3}^n-u_{m-3}^n)+\alpha_4(u_{m+4}^n-u_{m-4}^n)\},$$

为书写简洁起见，仅给出格式名称及 α_1，α_2，α_3，α_4的值．

表 1　对称蛙跳格式稳定性分析表

差分格式	α_1	α_2	α_3	α_4	稳定性条件及最优 θ 值 θ_0	截断误差	中间层点数
(16)	$-2+5\eta$	$1-4\eta$	η	0	式 (17)		
(16a)	$-3/4$	0	$1/4$	0	$\|R\|<1,\ \theta_0=90°$	$O(\tau^2+h^4)$	七
(16b)	-0.1899	-0.4481	0.3620	0	$\|R\|<1.5067,\theta_0=76.0036°$	$O(\tau^2+h^2)$	点
(16c)	$-13/4$	2	$-1/4$	0	$\|R\|<0.21697,\theta_0=129.2043°$	$O(\tau^2+h^4)$	
(18)	$-2+16\eta$	$1-10\eta$	0	η	式 (19)		
(18a)	$-4/10$	0	0	$1/10$	$\|R\|<2.1029,\theta_0=70°$	$O(\tau^2+h^2)$	九
(18b)	0	$-2/8$	0	$1/8$	$\|R\|<3.0792,\theta_0=60°$	$O(\tau^2+h^2)$	点
(18c)	$-8/3$	$17/12$	0	$-1/24$	$\|R\|<0.2799,\theta_0=120°$	$O(\tau^2+h^4)$	
(20)	η	0	$\frac{-(4+10\eta)}{14}$	$\frac{3+4\eta}{14}$	式 (21)		
(20a)	-0.2621	0	-0.0985	0.1394	$\|R\|<2.8514,\theta_0=62.9857°$	$O(\tau^2+h^2)$	九
(20b)	$-5/4$	0	$17/28$	$-2/14$	$\|R\|<0.5317,\theta_0=80.5267°$	$O(\tau^2+h^4)$	点
(22)	0	η	$-\frac{4+16\eta}{14}$	$\frac{3+5\eta}{14}$	式 (23)		
(22a)	0	-0.1857	-0.0734	0.1479	$\|R\|<3.2470,\theta_0=113.5782°$	$O(\tau^2+h^2)$	九
(22b)	0	$-\frac{70}{56}$	$\frac{64}{56}$	$\frac{-13}{56}$	$\|R\|<0.4092,\theta_0=147.4605°$	$O(\tau^2+h^4)$	点
(24)	$\frac{-488}{120}$	$\frac{338}{120}$	$\frac{-72}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\|R\|<0.12608,\theta_0=130.4870°$	$O(\tau^2+h^6)$	九点

4 数值例子

考虑文〔4〕中所计算的色散方程初边值问题，其准确解都是 $u(x,t)=\sin(\alpha t-x)$.

由于本文格式均为三层格式，对初始层及第一层网格函数值用精确值计算，而边界条件按文〔4〕处理．对于表 1 所列格式，网格比 $|R|$ 取到小数点后一位(小数点第二位后舍去)，逐一进行计算至 $N=300$ 层，其误差精度均达 10^{-4} 至 10^{-5}，由此可见，本文所构造的差分格式是相当有效的．但若取网格比 $|R|$ 到小数点后一位再加上 0.1，则计算很快得出，因此表 1 中所列网格比已近乎稳定的充要条件．因篇幅所限，仅列出按格式(22a)计算的误差结果如表 2 所示，其中取 $|R|=3.2$ 计算至 $N=300$，其误差精度为 10^{-4}；若取 $|R|=3.3$，则计算至 $N=25$

已溢出.

表2 格式(22a)误差结果①

R	X	$N=40$	$N=90$	$N=140$	$N=190$	$N=250$	$N=300$
	2.40E−01	8.53E−05	1.90E−04	2.79E−04	3.30E−04	3.39E−04	3.47E−04
3.20E+00	4.80E−01	6.19E−05	1.72E−04	3.03E−04	4.17E−04	5.20E−04	5.71E−04
	7.20E−01	6.86E−05	1.24E−04	1.63E−04	2.02E−04	2.80E−04	3.74E−04
	2.40E−01	−4.30E−05	−7.00E−05	−7.20E−05	−7.70E−05	−1.40E−04	−2.10E−04
−3.20E+00	4.80E−01	−4.70E−05	−7.80E−05	−1.10E−04	−1.50E−04	−2.20E−04	−2.70E−04
	7.20E−01	−7.00E−05	−1.50E−04	−1.90E−04	−1.90E−04	−1.50E−04	−1.30E−04

① $a=\pm 1.0E+00$ $h=0.02$ $|R|=3.20E+00$

参 考 文 献

1 秦孟兆. 色散方程 $u_t=a\cdot u_{xxx}$ 的差分格式. 计算数学. 1984, 6(1): 1~13

2 黎 益. 关于色散方程 $u_t=a\cdot u_{xxx}$ 的三层显式差分格式. 四川大学学报, 1988, 25(3): 298~306

3 Richtmyer R D, Morton K W. Difference method for initial-ualue problems. 2rd ed. New York: Wiley, 1967. 120~168

4 曾文平. 斜色散方程的一类新的无条件稳定的半显格式. 华侨大学学报(自然科学版), 1991, 12(3):274~278

Stability analysis of Leapfrog Type Symmetrical Difference Schemes

Chen Sixiong Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For solving dispersion equation $u_t=a\cdot u_{xxx}$, several leapfrog type symmetrical difference schemes are established by the method of undetermined coefficients. Among them, the scheme (22a) serves as the most stable scheme with the stability condition of $|R|\leqslant 3.2470$. In addition, the authors develop a high precision leapfrog type symmetrical explicit difference (24) which shows a truncation error of $O(\tau^2+h^6)$ but a stability condition of $|R|\leqslant 0.16208$.

Keywords leapfrog type symmetrical explicit difference scheme, stability analysis, dispersion equation