第 16 卷 第 1 期 华侨大学学报（自然科学版） Vol. 16 No. 1
1995 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 1995

MPSD 迭代法的收敛性定理*

陈 恒 新

（华侨大学管理信息科学系，泉州 362011）

摘要 在线性方程组系数矩阵 A 为相容次序矩阵和 A 的 Jacobi 矩阵的特征值 μ_j 均为实数的条件下，证明了 MPSD 迭代法的收敛定理．

关键词 线性方程组，MPSD 法，收敛性

分类号 O 241.6

1 MPSD 迭代法

解线性代数方程组 $AX=b$ 的 MPSD 迭代法包括了一些熟知的迭代法，如 PSD，JOR，AOR，SSOR，PJ 等迭代法[1]．当系数矩阵 A 是对称正定阵、非奇异 H-阵时，关于 PSD 等迭代法的收敛性已有结论[1]．本文在 A 为相容次序矩阵，以及 A 的 Jacobi 矩阵的特征值 μ_j 均为实数且 $\mu_j^2<1$ 的条件下，证明了其统一形式 MPSD 迭代法的收敛性．

由于 MPSD 迭代法包含了 SSOR 迭代法，而大多数论及 SSOR 法的文章均把 SSOR 法的迭代矩阵 φ_ω 记为 $\varphi_\omega=(I-\omega U)^{-1}[(1-\omega)I+\omega L](I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega U]$[2,3]．为了与之统一，我们所论及的 MPSD 法的相应迭代矩阵 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}$ 与文〔1〕的记法有些不同．即把 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}=M^{-1}N$ 中相应的 M 取为 $M=D(I-\omega_1L)(I-\omega_2U)$．但需说明的是，不论采用哪种记法，本文的结果均是一致的，且证明过程几乎完全相同．

对于线性代数方程组

$$AX=b \tag{1}$$

设 $A=D-E-F$ 是 $n\times n$ 实矩阵，其中 D 是非奇异对角阵，E 是严格下三角阵，F 是严格上三角阵．

记 $L=D^{-1}E$，$U=D^{-1}F$，则矩阵 A 之 Jacobi 矩阵为 $B=D^{-1}E+D^{-1}F=L+U$.

于是求解方程组(1) 之 MPSD 法为

$$X^{(m+1)}=S_{\tau,\omega_1,\omega_2}X^{(m)}+\tau(I-\omega_2U)^{-1}(I-\omega_1L)^{-1}D^{-1}b,\ \tau\neq0,\ m=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

其中 MPSD 法迭代矩阵为

$$\begin{aligned}S_{\tau,\omega_1,\omega_2}&=(I-\omega_2U)^{-1}(I-\omega_1L)^{-1}[(1-\tau)I+(\tau-\omega_1)L+(\tau-\omega_2)U+\omega_1\omega_2LU]\\&=I-\tau(I-\omega_2U)^{-1}(I-\omega_1L)^{-1}(I-L-U).\end{aligned} \tag{3}$$

---

* 本文 1994-05-06 收到；福建省自然科学基金资助项目

当 MPSD 迭代法中参数 ω_1,ω_2,τ 取不同的值便可得到各种迭代法，如 PSD，JOR，AOR，SSOR，PJ 等，详见文〔1〕之表 1.

例如，按通常的记法，取 $\tau=\omega$，$\omega_1=\gamma$，$\omega_2=0$ 则

$$S_{\omega,\gamma,0}=(I-\gamma L)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-\gamma)L+\omega U]=L_{\gamma,\omega},$$

即 MPSD 迭代法变为 AOR 迭代法了.

当取 $\omega_1=\omega_2=\omega$，$\tau=\omega(2-\omega)\neq 0$，由于

$$(I-\omega L)[(1-\omega)I+\omega L]=[(1-\omega)I+\omega L](I-\omega L)$$
$$[(1-\omega)I+\omega L](I-\omega L)^{-1}=(I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega L],$$

因此

$$\begin{aligned}S_{\omega(2-\omega),\omega,\omega}&=(I-\omega U)^{-1}(I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)^2I+\omega(1-\omega)(L+U)+\omega^2LU]\\&=(I-\omega U)^{-1}(I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega L][(1-\omega)I+\omega U]\\&=(I-\omega U)^{-1}[(1-\omega)I+\omega L](I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega U]=\varphi_\omega,\end{aligned}$$

即 MPSD 迭代法变为 SSOR 迭代法了.

2 MPSD 迭代法收敛性定理

首先，由文〔4〕引理 2.2 有

引理 对实系数二次方程 $\gamma^2-b\gamma+c=0$，它的两个根 γ_1 和 γ_2 的模小于 1 的充要条件是

$$|c|<1 \text{ 和 } |b|<1+c.$$

定理 若方程组(1)的系数矩阵 A 为相容次序矩阵，其 Jacobi 矩阵 B 的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 均为实数，且 $\mu_j^2<1$ (即 $|\mu_j|<1$)，$j=1,2,\cdots,n$. 则当

$$0\leqslant\omega_1\leqslant 2,\ 0\leqslant\omega_2\leqslant 2,\ 0<\tau\leqslant 1 \tag{4}$$

时(条件(4)亦可减弱为 $|\omega_1-1|\cdot|\omega_2-1|\leqslant 1$，$0<\tau\leqslant 1$)，解方程组(1) 之 MPSD 迭代法(2)收敛(即 $\rho(S_{\tau,\omega_1,\omega_2})<1$).

证明 现先来推导 MPSD 迭代矩阵 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}$ 之特征值与 Jacobi 矩阵 B 之特征值的关系式. 因 $A=D-E-F=D(I-L-U)$ 为相容次序矩阵，故矩阵 $I-L-U$ 亦为相容次序矩阵. 由于 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}$ 迭代阵为(3)之形式，而对于任意排列矩阵 P，$PS_{\tau,\omega_1,\omega_2}P^{\mathrm{T}}$ 之特征值与 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}$ 同. 故不失一般性. 设 $I-L-U$ 具有如下形式

$$I-L-U=\begin{bmatrix}I_1 & -H\\ -K & I_2\end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中 I_1，I_2 均为单位矩阵，于是

$$L=\begin{bmatrix}0 & 0\\ K & 0\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}0 & H\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=L+U=\begin{bmatrix}0 & H\\ K & 0\end{bmatrix}.$$

由式(3)，记 $R=(I-\omega_2U)^{-1}(I-\omega_1L)^{-1}(I-L-U)$，则有 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}=I-\tau R$，所以

$$\begin{aligned}R&=\begin{bmatrix}I_1 & \omega_2H\\ 0 & I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1 & 0\\ \omega_1K & I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1 & -H\\ -K & I_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}I_1+\omega_1\omega_2HK & \omega_2H\\ \omega_1K & I_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1 & -H\\ -K & I_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} I_1+(\omega_1\omega_2-\omega_2)HK & (\omega_2-1)H-\omega_1\omega_2HKH \\ (\omega_1-1)K & I_2-\omega_1KH \end{bmatrix}. \tag{6}$$

设 Jacobi 矩阵 B 之特征值为 μ，对应特征向量为 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\neq 0$. 这里的划分同(5)，于是由

$$\begin{bmatrix} 0 & H \\ K & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix},$$

有

$$\left.\begin{aligned} &HY=\mu X,\ KX=\mu Y, \\ &HKX=\mu^2X,\ KHY=\mu^2Y,\ HKHY=\mu^3X. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

设 R 的特征值为 η，观察式(6)，(7)可知对应特征向量可记为 $\begin{bmatrix} X \\ tY \end{bmatrix}\neq 0$，这里 $t\neq 0$ 为任意实数．于是有

$$\begin{bmatrix} I_1+(\omega_1\omega_2-\omega_2)HK & (\omega_2-1)H-\omega_1\omega_2HKH \\ (\omega_1-1)K & I_2-\omega_1KH \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ tY \end{bmatrix}=\eta\begin{bmatrix} X \\ tY \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} X+(\omega_1\omega_2-\omega_2)HKX+t(\omega_2-1)HY-t\omega_1\omega_2HKHY=\eta X, \\ (\omega_1-1)KX+tY-t\omega_1KHY=t\eta Y. \end{cases}$$

由式(7)便得

$$\left.\begin{aligned} &(1+(\omega_1-1)\omega_2\mu^2+t(\omega_2-1)\mu-t\omega_1\omega_2\mu^3)X=\eta X, \\ &((\omega_1-1)\mu+t-t\omega_1\mu^2)Y=t\eta Y. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

显然，$X,Y\neq 0$，所以式(8)等价于

$$\begin{bmatrix} 1+(\omega_1-1)\omega_2\mu^2 & (\omega_2-1)\mu-\omega_1\omega_2\mu^3 \\ (\omega_1-1)\mu & 1-\omega_1\mu^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}=\eta\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \tag{9}$$

式(9)之特征多项式为

$$\begin{aligned} f(\eta)=&[\eta-(1+(\omega_1-1)\omega_2\mu^2)][\eta-(1-\omega_1\mu^2)] \\ &-(\omega_1-1)\mu[(\omega_2-1)\mu-\omega_1\omega_2\mu^3] \\ =&\eta^2-(1+(\omega_1-1)\omega_2\mu^2+1-\omega_1\mu^2)\eta+(1+(\omega_1 \\ &-1)\omega_2\mu^2)(1-\omega_1\mu^2)-(\omega_1-1)(\omega_2-1)\mu^2+(\omega_1-1)\omega_1\omega_2\mu^4 \\ =&\eta^2-(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2)\eta+1+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2 \\ &-(\omega_1-1)\omega_1\omega_2\mu^4-(\omega_1-1)(\omega_2-1)\mu^2+(\omega_1-1)\omega_1\omega_2\mu^4 \\ =&\eta^2-(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2)\eta+1-\mu^2. \end{aligned}$$

令 $f(\eta)=0$，便得到 η 与 μ 之关系式

$$\eta^2-(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2)\eta+1-\mu^2=0. \tag{10}$$

由于 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}=I-\tau R$，所以 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}$ 之特征值 $\lambda=1-\tau\eta$. 因由式(2)知 $\tau\neq 0$，于是有 $\eta=(1-\lambda)/\tau$，代入(10)便得

$$\begin{gathered} (1-\lambda)^2-(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2)(1-\lambda)\tau+(1-\mu^2)\tau^2=0, \\ \lambda^2-2\lambda+1+\tau(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2)\lambda \\ -\tau(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2)+(1-\mu^2)\tau^2=0, \\ \lambda^2-[2-\tau(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2)]\lambda \end{gathered}$$

$$-\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu^2]+1+(1-\mu^2)\tau^2=0. \tag{11}$$

由推导过程可知,对 B 之任一特征值 μ_j,必存在 $S_{\tau,\omega_1,\omega_2}$ 之特征值 λ_j 满足式(11),反之亦然.即有

$$\lambda_j^2-[2-\tau(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2)]\lambda_j$$
$$-\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2]+1+(1-\mu_j^2)\tau^2=0 \quad j=1,2,\cdots,n. \tag{12}$$

由引理知式(12)的二根 $|\lambda_j|<1$ 的充要条件是

$$\left.\begin{aligned}&|-\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2]+1+(1-\mu_j^2)\tau^2|<1,\\&|2-\tau(2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2)|<1-\tau[2+(\omega_1\omega_2\\&\quad-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2]+1+(1-\mu_j^2)\tau^2.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

而式(13)等价于

$$(1-\mu_j^2)\tau^2<\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2], \tag{14a}$$

$$\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2]<2+(1-\mu_j^2)\tau^2, \tag{14b}$$

$$(1-\mu_j^2)\tau^2>0, \tag{14c}$$

$$2\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2]<4+(1-\mu_j^2)\tau^2. \tag{14d}$$

因此要证明 MPSD 迭代法收敛,即 $\rho(S_{\tau,\omega_1,\omega_2})<1$,只要证明式(14a~14d)成立便可.

由于 $\mu_j^2<1,\tau>0$. 因此有式(14c)$(1-\mu_j^2)\tau^2>0$ 成立.

现先证下述不等式成立

$$-2\leqslant\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2\leqslant 0. \tag{15}$$

因由已知条件(4)有 $0\leqslant\omega_i\leqslant 2$, $i=1,2$ 于是有 $-1\leqslant\omega_i-1\leqslant 1$, 即 $|\omega_i-1|\leqslant 1$, $i=1,2$. 因此有

$$|(\omega_1-1)(\omega_2-1)|=|\omega_1-1||\omega_2-1|\leqslant 1,$$

所以有

$$-1\leqslant(\omega_1-1)(\omega_2-1)\leqslant 1,$$

即

$$-1\leqslant\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2+1\leqslant 1,$$

从而

$$-2\leqslant\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2\leqslant 0.$$

式(15)得证.

由已知有 $0<\tau\leqslant 1<2$, $1-\mu_j^2>0$. 于是由式(15)有

$$\tau<2=\frac{2-2\mu_j^2}{1-\mu_j^2}\leqslant\frac{2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2}{1-\mu_j^2},$$

$$(1-\mu_j^2)\tau<2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2.$$

从而有

$$(1-\mu_j^2)\tau^2<\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2].$$

即式(14a)成立.

又由式(15)有

$$\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2]\leqslant\tau[2+0]\leqslant 2<2+(1-\mu_j^2)\tau^2,$$

即(14b)式成立. 又

$$2\tau[2+(\omega_1\omega_2-\omega_1-\omega_2)\mu_j^2]\leqslant 2\tau[2+0]\leqslant 4<4+(1-\mu_j^2)\tau^2,$$

即(14d)式成立.

至此，对一切满足已知条件式(4)之 ω_1,ω_2,τ，已证得式(14a～14d)皆成立，故 $\rho(S_{\tau,\omega_1,\omega_2})<1$. 定理得证.

当定理中的 ω_1,ω_2,τ 取不同的值，便可得到相应的 PSD，JOR，AOR，SSOR，PJ 等迭代法的收敛定理.

例如，当取 $\omega_1=\gamma,\omega_2=0$，$\tau=\omega$ 和 $\omega_1=\omega_2=\omega$，$\tau=\omega(2-\omega)$，便得到下述推论.

推论　若方程组(1)的系数矩阵 A 为相容次序矩阵，其 Jacobi 矩阵 B 的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 均为实数，且 $\mu_j^2<1$ (即 $|\mu_j|<1$)，$j=1,2,\cdots,n$. 则

(i) 当 $0<\omega\leqslant1$，$0\leqslant\gamma\leqslant2$ 时 AOR 迭代法收敛(即 $\rho(L_{\gamma,\omega})<1$)；

(ii) 当 $0<\omega<2$ 时，SSOR 迭代法收敛 (即 $\rho(\varphi_\omega)<1$).

参　考　文　献

1　刘兴平. 某些迭代方法的收敛性. 数值计算与计算机应用，1992，(1)：58～64

2　胡冠初，汤健康. 一类矩阵的 SSOR 法的误差估计. 计算数学，1987，(1)：91～98

3　徐树方. 关于 SSOR 迭代法应用于最小二乘问题时的收敛定理的一个注记. 高等学校计算数学学报，1993，(1)：95～98

4　曹志浩，张玉德，李瑞遐. 矩阵计算和方程求根. 北京：高等教育出版社，1984. 72～73

Convergence Theorem of MPSD Iteration Method

Chen Hengxin

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　The convergence theorem is proved under the conditions that system matrice A of linear equations are consistently ordered matrice; and eigenvalues of the Jacobi matrice of A are all real numbers.

Keywords　linear equations, iteration method, convergence