第 15 卷 第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 15 No. 4
1994 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 1994

调运问题的新解法*

元素判别值分配法的研究与实现

张银明

(华侨大学电子工程系,泉州 362011)

摘要 对运筹学的调运问题提出一种新解法——元素判别值分配法．它不同于国内外现行的任一种方法,只须一次调配即获最佳方案,不必进行调整．此法既便于人工操作,又易于程序实现．

关键词 分配方法,元素判别值,最佳方案,运输调运

分类号 O 22

运输的合理调度是国民经济中具有重要意义的问题．对调运最优方案的求解,一是利用单纯形法,二是使用表上作业法．但前者不易被一般人所掌握,后者又需反复调整和改进,因而不利于推广应用．本人研究出一个新方法．由于它是根据"元素判别值"进行分配的,故称为"元素判别值分配法"．使用它求解调运问题,仅需调配一次便可得到最优方案,无须任何调整,因而具有独创性,比现行的任何求解方法要优越得多,是求解方法的突破性进展．

1 现行方法的分析

目前国内外对运输调运问题的求解方法[1~8]除单纯形法外,主要有以下一些方法．(1) 西北角法和最小元素法．美国称之为西北角法则和最小费用法则．这是最常用的方法,它所存在的主要问题:(a) 要进行退化的检查和处理;(b)要对每一未分配的空格寻找闭合回路及计算出检验数;(c) 需要多次调整．这都给求解增添不少麻烦．(2) 阶石法．日本学者称为阶石法的求解方法,实质上是应用西北角法则和观察法的一种方法．同样存在方法 1 所提的不足之处．(3) Vogel 近似法(Vogel's Approximation Method)．有的译为伏格尔法,它是通过比较运输表中每一行或列最小元素和次最小元素的差额大小进行分配的一种方法,亦称差值法．它仍需使用闭合回路计算检验数据进行不断调整．(4) 由匈牙利数学家狄·考尼克(D·Kōnig)研究的匈牙利法．它主要在于修改效能矩阵的每一行和列,直到在每一行和列里至少有一个零分量,从而得到与这些零元素相应的完全分配．当它应用于原效能矩阵时,这个完全分配是一个最优解,总的效能最小．它要反复地缩减效能矩阵,求解过程也不容易．

总之,现行求解方法没有突破在初始基本可行解的基础上进行多次迭代的模式,不能一次

* 1994-04-26 收到

性分配成功,因而不够理想.

2　相关定义和数学模型

不妨假设一般调运问题具有 m 个供应处 A_i,对应可供应量为 G_i;有 n 个需求点 B_j,其对应需求量为 Q_j;从 A_i 配给 B_j 的数量为 x_{ij},单位运费为 C_{ij};且供需平衡.其中 $i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$. 要求运费最小的调配方案.这个问题可归结为线性规划问题,其数学模型为

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\cdot x_{ij}, \tag{1}$$

满足约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = G_i, \qquad i = 1,2,\cdots m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = Q_j, \qquad j = 1,2,\cdots n, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (\sum_{i=1}^{m} G_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j). \tag{4}$$

它的调运图如图 1. 对此问题的求解可使用元素判别值分配法.下面介绍它的有关概念.

定义 1　A_i 调给 B_j 的待定变量 x_{ij} 称为元素.

定义 2　凡能排列成下列形式

$$x_{ij},x_{i,j+K},x_{i+L,j+K},x_{i+L,j} \tag{5}$$

的元素的集合称为矩形回路.其中 $i=1,2,\cdots m$;$1-i\leqslant L\leqslant m-i$ 且 $L\neq 0$;$j=1,2,\cdots n$;$1-j\leqslant K\leqslant n-j$ 且 $K\neq 0$(下面如无另加说明,下标取值同此).

定义 3　在一个以 x_{ij} 为顶点的矩形回路内,当调整一个单位运输量并以 x_{ij} 为调进对象时,引起该回路运费增减的数量,称为元素 x_{ij} 在此矩形回路的检验数.记作 Δx_{ij}.

需求处 / 供应点	B_1	…	B_n	供应量
A_1	C_{11}　x_{11}	…	C_{1n}　x_{1n}	G_1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	C_{m1}　x_{m1}	…	C_{mn}　x_{mn}	G_m
需求量	Q_1	…	Q_n	ΣG_i / ΣQ_j

图 1　一般运输问题调运分配图

定义 4　当对一个元素进行分配时,它所在行的供应量全部分完及所在列的需求量全得到满足,这称为对元素所在行列的完全分配,简称为对该元素的全分配.

定义 5　元素 x_{ij} 所有矩形回路的检验数小于零的个数,称为元素 x_{ij} 的判别值,记为 $\mathrm{d}x_{ij}$.

定义 6　按照元素判别值进行调运问题分配的求解方法,称为元素判别值分配法.

根据上述定义,在一个 $m\times n$ 阶调运平衡图中,含有 $m\times n$ 个元素.每个元素以它为顶点的矩形回路计有 $(m-1)(n-1)$ 个.元素 x_{ij} 的矩形回路检验数由下式计算,即

$$\Delta x_{ij} = C_{ij} - C_{i,j+K} + C_{i+L,j+K} - C_{i+L,j}. \tag{6}$$

显然,$\Delta x_{ij}=\Delta x_{i+L,j+K}$,且 $\Delta x_{i,j+K}=\Delta x_{i+L,j}=-\Delta x_{ij}$.

由于一个元素有 $(m-1)(n-1)$ 个检验数,亦即 Δx_{ij} 的个数是有限的,因而总可找到一种顺序,使 $\Delta x_{ij}\sim\Delta x_s$ 相对应($s=1,2,\cdots,(m-1)(n-1)$). 为此而约定,元素 x_{ij} 的矩形回路依照自左向右、由上而下的顺序确定.这样,如果定义函数

$$f_s(x)=\begin{cases}1,\text{当 } x<0,\\ 0,\text{当}\geqslant 0.\end{cases}$$

则元素 x_{ij}的判别值可表示为

$$\mathrm{d}x_{ij}=\sum_{s=1}^{(m-1)(n-1)}f_s(\Delta x_{ij})=\sum_{s=1}^{(m-1)(n-1)}f_s(C_{ij}-C_{i,j+K}+C_{i+L,j+K}-C_{i+L,j}).\tag{7}$$

式(7)就是元素判别值的数学模型．由此可知，任一个元素的判别值其取值区间为〔0，$(m-1)(n-1)$〕.

3　分配原则与求解步骤

按照元素判别值进行分配，有以下基本原则．

原则 1　判别值为$(m-1)(n-1)$的元素必须优先进行分配．

原则 2　判别值小于$(m-1)(n-1)$的元素，一般按值的大小顺序分配，其值越大，优先级越高．

原则 3　当对一个元素进行全分配时，它所在行或列的元素对余量进行的调配不再进行全分配．

原则 4　若同行或同列中有多个元素的判别值相同，则应对运费小的元素先分配．假如运费相同，便可按下标由小到大的顺序进行分配．

原则 5　当某行的供应量已分完或某列的需求量已得到满足，那么处于该行或该列的元素，不论判别值多大皆失去分配权．

遵照这些原则，可得出新的求解方法步骤．(1) 建立调运初始平衡图，如供需不平衡，则增设虚似点，使之供需平衡．(2) 计算各元素的判别值 $\mathrm{d}x_{ij}$. (3) 根据元素判别值和分配原则进行分配．其过程可描述为：(a) 从 $\mathrm{d}x_{ij}$中选最大值的元素(如同行同列中有多个按原则 4)x_{ij}进行分配，$x_{ij}=\min(G_i,Q_j)$；(b) 若 $G_i-x_{ij}=0$ 且 $Q_j-x_{ij}\neq 0$，则第 i 行已分完，可作标志；在第 j 列未分配元素中找 $\mathrm{d}x_{ij}$最大的元素(如有多个按原则 4)x_{ij_1}，其分配量为 $x_{ij_1}=Q_j-x_{ij}$；第 j 列已满足，可作标志；(c) 如 $G_i-x_{ij}\neq 0$ 且 $Q_j-x_{ij}=0$，那么第 j 列已满足，可作标志；在第 i 行未分配元素中找 $\mathrm{d}x_{ij}$最大的元素(如有多个按原则 4)x_{ij}进行分配，则 $x_{i,j}=G_i-x_{ij}$；第 i 行已分完，可作标志；(d) 若 $G_i-x_{ij}=0$ 且 $Q_j-x_{ij}=0$，则第 i 行与第 j 列同时分完，皆作标志．重复上过程，直到全分配完成．上述描述可概括为：从未分配的元素中选判别值最大且满足原则 4 的元素进行全分配，重复此操作直到全部分配完成．这样分配的结果便是最优调运方案．

4　元素判别值分配法的使用

现举例说明元素判别值分配法的使用．

例 1　文〔1〕第 11 章运输问题的例 1．具体问题不再详述，可归结为图 2 的初始平衡图．原书使用霍撒克法则，它要进行多次检验调整和改进，方获最优方案．现使用元素判别值分配法

销售地 / 生产地	销售地1	销售地2	销售地3	生产量
生产地1	16　x_{11}	15　x_{12}	25　x_{13}	10
生产地2	19　x_{21}	24　x_{22}	12　x_{23}	8
销售量	5	6	7	18 / 18

图 2　产销问题-调配初始平衡图

进行求解.(1) 列调配初始平衡图,如图2所示.(2) 计算元素判别值.该题 $m=2,n=3$,有6个元素,每个元素的判别值在0～2之间.为说明简便,按下列格式计算各元素(以 x_{11},x_{12},x_{13},为例)判别值.即

元素	矩形回路及运费	Δx_{ij}符号	$f_s(\Delta x_{ij})$
x_{11}	$x_{11}\underline{16}\ x_{12}\underline{15}\ x_{22}\underline{24}\ x_{21}\underline{19}\ x_{11}$	$16-15+24-19>0$	0
	$x_{11}\underline{16}\ x_{13}\underline{25}\ x_{23}\underline{12}\ x_{21}\underline{19}\ x_{11}$	$16-25+12-19<0$	1
x_{12}	$x_{12}\underline{15}\ x_{22}\underline{24}\ x_{21}\underline{19}\ x_{11}\underline{16}\ x_{12}$	$15-24+19-16<0$	1
	$x_{12}\underline{15}\ x_{13}\underline{25}\ x_{23}\underline{12}\ x_{22}\underline{24}\ x_{12}$	$15-25+12-24<0$	1
x_{13}	$x_{13}\underline{25}\ x_{23}\underline{12}\ x_{21}\underline{19}\ x_{11}\underline{16}\ x_{13}$	$25-12+19-16>0$	0
	$x_{13}\underline{25}\ x_{23}\underline{12}\ x_{22}\underline{24}\ x_{12}\underline{15}\ x_{13}$	$25-12+24-15>0$	0

所以,$dx_{11}=0+1=1$,$dx_{12}=2$,$dx_{13}=0$. 同样可计算其他元素的判别值为 $dx_{21}=1$,$dx_{22}=0$,$dx_{23}=2$. 这些判别值填入分配图各元素右下小方格之中,如图3所示.它增加标志行和标志列.(3) 按元素判别值进行分配.判别值最大为2,有两个元素,但不同行同列,因而虽 $C_{23}<C_{12}$,仍对 x_{12} 先行分配,则 $x_{12}=\min(10,6)=6$,第2列已满足,在标志行作标志 *(1). 第1行余下 $10-6=4$,所以在第1行余下未分配元素中找判别值最大为 $dx_{11}=1$,那么 $x_{11}=\min(4,5)=4$. 这样,第1行已分完,作标志 *(2). 接着应对 x_{23} 进行分配,$x_{23}=\min(8,7)=7$. 此时,第3列已满足,标上 *(3). 第2行余下 $8-7=1$,该行余下未分配元素的判别值最大为1. 因此,$x_{21}=1$;第2行与第1列同时完成,皆标上 *(4). 至此,全部分配完成.其最优调配方案为生产地1:调给销售地1为4,调给销售地2为6;生产地2:调给销售地1为1,调给销售地3为7. 其最小运费为257. 同原书一致.

销售地 / 生产地	销售地1	销售地2	销售地3	生产量	标志列
生产地1	16 x_{11} 4 1	15 x_{12} 6 2	25 x_{13} 0	10	*(2)
生产地2	19 x_{21} 1 1	24 x_{22} 0	12 x_{23} 7 2	8	*(4)
销售量	5	6	7	18 18	***
标志行	*(4)	*(1)	*(3)	***	***

图3　产销问题-元素判别值分配图

例2　文〔7〕第5章例9. 该题供需不平衡,需大于供,因而虚设一个供应站Ⅲ,其供应量为1500. 这样,就成为图4的平衡图.现求解如下:(1) 列调运初始平衡图,如图4所示.(2) 计算各元素判别值.因计算简便又同上例,不再详述.其结果如图5各元素右下小方格所列.(3) 按元素全分配方法进行分配.(a) 元素判别值最大为 $dx_{12}=4$,$dx_{23}=4$,两者非同行同列,则对 x_{22} 先行全分配:$x_{12}=\min(3\,000,1\,500)=1\,500$,第2列已满足,标上 *(1);第1行余1 500,且 x_{11} 的判别值大于 x_{13},故 $x_{11}=\min(1\,500,2\,000)=1500$. 这样,第1行已分完,标上 *(2). 至此,对 x_{12} 的全分配已完成.第1列尚余500. (b) 对 x_{23} 进行全分配,则 $x_{23}=\min(4\,000,5\,000)=4\,000$,第2行已分完,标上 *(3);第3列余1000,该列未分配元素中有 $dx_{33}=2$,因而 $x_{33}=\min(1500,1\,000)=1\,000$,这时第3列已满足,标上 *(4).(c)余下未分配元素有 x_{31},且 $dx_{31}=2$. 第3行余下500,第1列尚需500,故 $x_{31}=500$. 第3行与第1列全标上 *(5).

至此，分配完成，其结果便是最优方案．

城市 / 供应站	A 城	B 城	C 城	供应量（件）
供应站 Ⅰ	10 x_{11}	4 x_{12}	12 x_{13}	3000
供应站 Ⅱ	8 x_{21}	10 x_{22}	3 x_{23}	4000
供应站 Ⅲ	0 x_{31}	0 x_{32}	0 x_{33}	1500
需求量（件）	2000	1500	5000	8500 / 8500

图 4　供需问题-元素判别值分配法初始平衡图

城市 / 供应站	A 城	B 城	C 城	供应量（件）	标志列
供应站 Ⅰ	10 x_{11} 1500 2	4 x_{12} 1500 4	12 x_{13} 0	3000	*(2)
供应站 Ⅱ	8 x_{21} 2	10 x_{22} 0	3 x_{23} 4000 4	4000	*(3)
供应站 Ⅲ	0 x_{31} 500 2	0 x_{32} 2	0 x_{33} 1000 2	1500	*(5)
需求量	2000	1500	5000	8500 / 8500	***
标志行	*(5)	*(1)	*(4)	***	***

图 5　供需问题-元素差别值分配法判别值图

例 3　见文〔2〕第 7 章运输方法 7.2 节阶石法所举之例．现用元素判别值分配法求解．(1) 列初始平衡图．因供过于求，故虚设 H 货栈，其需求量为1000，使之供需平衡，如图 6 所示．(2) 计算元素判别值．由于该计算仅由矩形回路四个顶点的运费进行加减运算，而且只判别其正负便可确定 $f_s(\Delta x_{ij})$的值，故极为简易方便，其结果值如图 7 各元素右下方格所列．(3) 进行分配．该分配只需根据分配原则进行则可，其过程同前例类似，结果如图 7 所示．(4) 最优调配方案．工厂 R 调给 A：1000，给 D：4000，给 F：1000，自留1000；工厂 S 调给 F：2500，给 G：1500；工厂 T 调给 B：2000，给 C：4500，给 E：2000，给 G：1500．其最小运费为78000 美元．该结果同原书答案一致．

货栈 / 工厂	A	B	C	D	E	F	G	H	工厂货量
工厂 R	6 x_{11}	7 x_{12}	5 x_{13}	4 x_{14}	8 x_{15}	6 x_{16}	5 x_{17}	0 x_{18}	7000
工厂 S	10 x_{21}	5 x_{22}	4 x_{23}	5 x_{24}	4 x_{25}	3 x_{26}	2 x_{27}	0 x_{28}	4000
工厂 T	9 x_{31}	5 x_{32}	3 x_{33}	6 x_{34}	5 x_{35}	9 x_{36}	4 x_{37}	0 x_{38}	10000
货栈需求量	1000	2000	4500	4000	2000	3500	3000	1000	21000 / 21000

图 6　元素判别值分配法初始平衡图

5　元素判别值分配法的算法描述

(1) 输入 m 及 n，定义数组 $F(m+1)$，$Q(n+1)$．

(2) 输入 $G(i)$，$Q(j)$($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)．

(3) 如果 $\sum_{i=1}^{m}G(i)>\sum_{j=1}^{n}Q(j)$，则 $Q(n+1)=\sum_{i=1}^{m}G(i)-\sum_{j=1}^{n}Q(j)$，$n=n+1$，执行(5)；否则执

行(4).

(4) 如果 $\sum_{i=1}^{m}G(i)<\sum_{j=1}^{n}Q(j)$,则 $G(m+1)=\sum_{j=1}^{n}Q(j)-\sum_{i=1}^{m}G(i)$,$m=m+1$.

(5) 定义数组 $C(m,n)$,$Dx(m,n)$,$X(m+2,n+2)$,并对数组进行初始化,且 $S=1$,$Z=0$.

货栈＼工厂	A	B	C	D	E	F	G	H	工厂货量
工厂R	6 x_{11} 1000 13	7 x_{12} 4	5 x_{13} 5	4 x_{14} 4000 11	8 x_{15} 0	6 x_{16} 1000 7	5 x_{17} 4	0 x_{18} 1000 9	7000 *(4)
工厂S	10 x_{21} 0	5 x_{22} 6	4 x_{23} 3	5 x_{24} 5	4 x_{25} 11	3 x_{26} 2500 12	2 x_{27} 1500 11	0 x_{28} 4	4000 *(6)
工厂T	9 x_{31} 6	5 x_{32} 2000 9	3 x_{33} 4500 11	6 x_{34} 4	5 x_{35} 2000 9	9 x_{36} 0	4 x_{37} 1500 5	0 x_{38} 7	10000 *(10)
货栈需求量	1000 *(1)	2000 *(8)	4500 *(7)	4000 *(2)	2000 *(9)	3500 *(5)	3000 *(10)	1000 *(3)	21000 21000

图7 元素判别值分配法调配图

(6) 输入运费 $C(m,n)$,且 $G(i)\Rightarrow x(i,n+1)$,$Q(j)\Rightarrow x(m+1,j)$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

(7) 计算各元素判别值.对 $i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,1-i\leqslant L\leqslant m-i$ 且 $L\neq0$ 和 $1-j\leqslant K\leqslant n-j$ 且 $K\neq0$. 执行操作:若 $C(i,j)-C(j,j+K)+C(i+L,j+K)-C(i+L,j)<0$,则 $Dx(i,j)=Dx(i,j)+1$.

(8) 尚有 $x(i,n+1)\neq0$ 或 $x(m+1,j)\neq0$? 如有,执行(9);否则转(13).

(9) 在当前未分配的元素中选 $Dx(i,j)$ 最大且符合分配原则的元素 $x(i,j)$,并执行 $x(i,j)=\min(x(i,n+1),x(m+1,j))$;$x(i,n+1)=x(i,n+1)-x(i,j)$,$x(m+1,j)=x(m+1,j)-x(i,j)$.

(10) 如果 $x(i,n+1)=0$ 且 $x(m+1,j)=0$,则 $x(i,n+2)='*(S)'$,$x(m+2,j)='*(S)'$;$S=S+1$,转(8);否则执行(11).

(11) 若 $x(i,n+1)\neq0$,转(12),否则 $x(i,n+2)='*(S)'$,$S=S+1$;在第 j 列未分配元素中选 $Dx(i,j)$ 最大且符合原则4的元素 $x(i_1,j)$,置 $x(i_1,j)=\min(x(m+1,j),x(i_1,n+1))$,$x(m+1,j)=x(m+1,j)-x(i_1,j)$,$x(i_1,n+1)=x(i_1,n+1)-x(i_1,j)$;如果 $x(m+1,j)\neq0$,重复此操作,直至 $x(m+1,j)=0$;尔后置 $x(m+2,j)='*(S)'$,$S=S+1$,转(8).

(12) $x(m+2,j)='*(S)'$,$S=S+1$. 在第 i 行未分配元素中选取 $Dx(i,j)$ 最大且符合原则4的元素 $x(i,j_1)$,置 $x(i,j_1)=\min(x(i,n+1),x(m+1,j_1))$,$x(i,n+1))=x(i,n+1)-x(i,j_1)$,$x(m+1,j_1)=x(m+1,j_1)-x(i,j+1)$;如果 $x(i,n+1)\neq0$,重复此操作,直至 $x(i,n+1)=0$;尔后置 $x(i,n+2)='*(S)'$,$S=S+1$,转(8).

(13) 计算最佳分配方案的运费,则当 $x(i,j)\neq0$ 时,$Z=Z+x(i,j)C(i,j)$ $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$.

(14) 输出最优分配方案及耗费 Z；结束．

该算法已经由程序实现，上述例题使用程序进行分配，其结果也一样．

6 结束语

数学模型(1)～(4)确定的调运问题，已有定理证明其最优解是存在的，而元素判别值分配法可以最佳路径在解空间找到最优解．同时，该方法找到了分配的关键因素——元素判别值，并一次分配可获最优解，而且元素判别值计算简易，分配过程方便．因而，它与现行国内外的各种方法相比，有其明显的创新性和优越性，是一个理想的新方法．

参　考　文　献

1 吉荆特 B E 著．运筹学导论——计算机算法．蔡宣三等译．北京：机械工业出版社，1982. 86～102
2 罗伯特 吉 瑟罗夫著．运筹学入门．薛华成等译．北京：清华大学出版社，1984. 169～178
3 小林龙一著．运筹学概论．何文杰译．北京：国防工业出版社，1985. 215～226
4 王永县．运筹学——规划论及网络．北京：清华大学出版社，1993. 29～50
5 吴文江．实用数学规划．北京：机械工业出版社，1993. 175～212
6 钱颂迪．运筹学．北京：清华大学出版社，1990. 79～102
7 中国人民大学管理系统工程教研室．管理系统工程教程．北京：经济科学出版社，1987. 194～216
8 魏国华．实用运筹学．上海：复旦大学出版社，1993. 93～115

A New Solution to the Problem of Transport Dispatching Study and Execution of the Allocation Method of Element Discriminant Value

Zhang Yinming

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A new solution known as the allocation method of element discriminant value is given to the problem of transport dispatching in operational research. Differing from other ones now available at home and abroad, the solution needs only one allocation to achieve an optimal scheme and it has no need of adjustment. The solution is easy of manual operation and program execution. It proves itself to be a new breakthrough in the solution of transport dispatching.

Keywords allocation method, element discriminant value, optimal scheme, transport dispatching