第 15 卷 第 4 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 15 No. 4
1994 年 10 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct. 1994

系统的分散与集中的决策*

(Ⅱ)分散控制效果分析

王 永 初

(华侨大学精密机械工程系,泉州 362011)

摘要 分散集中系统是一种重要的工业过程控制系统.合适的分散度有利于提高系统的性能指标,尤其是动态响应速度和误差时间的积分值都有明显地改善.文中提出若干系统分散的选择原则,并用仿真和理论分析加以证明.

关键词 分散度,系统性能指标,最优控制

分类号 TB 114.2

长期以来人们形成一个观念,集中程度愈高,系统的控制效果愈好;系统愈分散,系统的安全程度愈高.这仅仅是对问题认识的一个方面.从控制目标看,系统愈集中,参与决策的状态变量愈多,系统优化效果会愈好.但从实际控制效果分析,一个全状态众多回路状态反馈控制,不如一个等价的多级串联的低维状态反馈控制效果.同样,系统愈分散,局部子系统设备故障的危害愈低,因而对故障系统的修复更容易.但是,系统太分散,其配套设备台数增加,失效率增大,无故障工作时间也减少.因此,系统的分散程度是集散系统必须研究的一项重要内容.

1 系统分散有利于调节品质的提高

系统分散使调节品质提高,这一论题在以前的文献几乎没有涉及.由于这是一个本质的问题,因此本文从几个方面加以论证.

1.1 调节时间的比较

一个 n 阶的高维系统可分散成 k 个 n_i 维的子系统,其中 $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$. 假如 k 个分散子系统均为等阶,即有 $n=kn_i$. 系统的调节时间 t_s 同系统固有的调节振荡角频率 w_0 直接相关[1],即

$$t_s \doteq 3.2 \cdot 2\pi/w_0. \tag{1}$$

分散子系统串接排列是系统分散最常见的一种构成形式,其最长的调节时间,相当于 k 个分散子系统的调节时间之和.对等阶分散系统而言有

$$\bar{t}_s = \bar{t}_{i1} + \bar{t}_{i2} + \cdots + \bar{t}_{ik} = k\bar{t}_i. \tag{2}$$

为了分析方便,可以过程控制系统一种等 n 阶特性为例,因为这种特性具有普遍的意义.记对

* 本文 1994-01-20 收到;福建省自然科学基金资助项目

象特性为

$$G(s)=k_0/(Ts+1)^n, \tag{3}$$

则分散前后调节时间比为

$$\frac{t_s}{\tilde{t}_s}=\frac{t_s}{kt_s}=\frac{w_{0i}}{kw_0}=\tan(\frac{k\cdot 180^0)}{n}/k\tan(\frac{k\cdot 180^0}{n}). \tag{4}$$

当 n 为一个相当大的数时,可得

$$\frac{t_s}{\tilde{t}_s}\approx[\frac{k\cdot 180^0}{n}+\frac{1}{3}(\frac{k\cdot 180^0}{n})^3]\Big/k[\frac{180^0}{n}+\frac{1}{3}(\frac{180^0}{n})^3]>1, \tag{5}$$

即 $t_s>\tilde{t}_s$.

这就证明分散系统调节时间总和 $\tilde{t}_s$ 小于原来未分散系统的调节时间. 例如 $n=12$,分散成三个阶次为 $n_i=4$ 的子系统,调节时间可以缩短19.64%. 这是分散调节的一个优点. 由式(4)还可以得到 $k\approx n/2$,调节时间可减少最多. 系统最优分散数为 $k=\text{integer}(\frac{n}{2}+1)$,式中integer( )表示取括号中的整数.

1.2 调节精度的比较

调节过程是一个动态过程,加上许多系统的设计都倾向于无余差(即稳态误差)调节,因此系统的精度经常是以某一个误差函数来表征的. 例如,ISE 准则:$J=\int_{-\infty}^{\infty}e^2(t)\mathrm{d}t$;ISTSE 准则:$J=\int_{-\infty}^{\infty}[e(t)t]^2\mathrm{d}t$[2]. 这些准则函数值愈小,说明系统的调节精度愈高. 由系统的误差传递函数可以直接计算 J 值. 记 $F(s)$ 为系统误差的传递函数,是一个 s 算子的有理多项式

$$E(s)=\frac{c_{n-1}s^{n-1}+c_{n-2}s^{n-2}+\cdots+c_1s+c_0}{d_nn^s+d_{n-1}s^{n-1}+\cdots+d_1s+d_0}\triangleq\frac{C_n(s)}{D_n(s)}, \tag{6}$$

则对于 ISE 准则[3],有

$$J=\Sigma\operatorname*{Res}_{r_-}[E(s)E(-s)], \tag{7a}$$

对于 ISTSE 准则,有

$$J=\Sigma\operatorname*{Res}_{r_-}[\frac{\mathrm{d}E(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}E(-s)}{\mathrm{d}s}]. \tag{7b}$$

直接由式(7a)或(7b)计算 J 值,在低阶系统设计时还是有用. 但是当 $E(s)$ 的阶次较高时,计算 J 值仍然非常困难. 例如,ISE 准则二阶误差函数对应的 J_2 值为

$$J_2=d_0c_1^2+c_0^2d_2/2d_0d_1d_2, \tag{8}$$

三阶误差传递函数对应的 J_3 值为

$$J_3=\frac{c_2^2d_0d_1+(c_1^2-2c_0c_2)d_0d_3+c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3(d_1d_2-d_0d_3)}, \tag{9}$$

四阶误差传递函数对应的 J_4 值更加复杂. 为此,本文采用一种递推降阶模型计算 J_n 的方法. 式(6)分母与分子多项式降一阶为

$$D_{n-1}(s)=D_n(s)-\frac{d_n}{d_{n-1}}s\cdot\tilde{D}_n(s), \tag{10a}$$

$$C_{n-1}(s)=C_n(s)-\frac{c_{n-1}}{d_{n-1}}s\cdot\tilde{D}_n(s). \tag{10b}$$

其中，$\tilde{D}_n(s)=\frac{1}{2}[D_n(s)-(-1)^n D_n(-s)]$. 且 J_n 可写成

$$J_n = \Sigma \operatorname*{Res}_{r_-}[E_1(s)E_1(-s)] + \frac{c_{n-1}^2}{2d_n d_{n-1}}, \tag{11}$$

式中 $E_1(s)$ 为 $E(s)$ 分母与分子多项式各降一阶，或记成

$$J_n = J_{n-1}(1) + c_{n-1}^2/2d_n d_{n-1}. \tag{12}$$

同理，$J_{n-1}(1)=J_{n-2}(2)+C_{n-2}^2(1)/2d_{n-1}(1)d_{n-2}(1)$. 这是 $J_{n-1}(1)$，$J_{n-2}(2)$，$C_{n-2}(1)$ 等括号中的数，是表示第几次降阶．因此，$J_{n-1}(1)$ 是表示一次降阶的 $n-1$ 阶误差函数的准则函数值

于是，准则函数值可由一个通式表示为

$$J_{n-i}(i) = J_{n-(i+1)} + \frac{C_{n-(i+1)}^2(i)}{2d_{n-i}(i)d_{n-(i+1)}(i)}, \tag{13}$$

且

$$J_n = \frac{c_{n-1}^2}{2d_n d_{n-1}} + \frac{C_{n-2}^2(1)}{2d_{n-1}(1)d_{n-2}(1)} + \cdots + \frac{C_{n-(i+1)}^2(i)}{2d_{n-i}(i)d_{n-(i+1)}(i)} + \cdots + \frac{C_0^2(n-1)}{2d_1(n-1)d_0(n-1)}. \tag{14}$$

我们在文〔4〕给出1～12阶闭环系统的传递函数．根据误差传递函数 $E(s)$ 与闭环传递函数 $W(s)$ 的关系，有

$$E(s) = (1-W(s))R(s), \tag{15a}$$

其中 $R(s)$ 为闭环系统输入信号的传递函数，且知 $W(s)$ 与开环传递函数 $G(s)$ 的关系为

$$G(s) = W(s)/(1-W(s)), \tag{15b}$$

以及输出被控制信号的传递函数 $Y(s)=G(s)E(s)$，立即可得式(15a)的关系式．因此，当 $W(s)$ 及 $G(s)$ 给出后，$E(s)$ 便可直接由式(15b)得到．例如，文〔4〕给出六阶闭环系统的最优传递函数为

$$W(s) = (s^6 + 3.863\,7s^5 + 7.464s^4 + 9.141\,5s^3 + 7.464s^2 + 3.863\,7s^1 + 1)^{-1}, \tag{16}$$

假设 $R(s)=s^{-1}$(即单位阶跃信号)，按式(15)的关系可求得

$$E(s) = \frac{s^5 + 3.863\,7s^4 + 7.464s^3 + 9.141\,5s^2 + 7.464s + 3.863\,7}{s^6 + 3.863\,7s^5 + 7.464s^4 + 9.141\,5s^3 + 7.464s^2 + 3.863\,7s + 1}. \tag{17}$$

为了应用式(14)的计算式，将式(17)记成

$$E(s) = C_n(s)/D_n(s), \tag{18}$$

其中 $C_n(s)=c_5s^5+c_4s^4+c_3s^3+c_2s^2+c_1s+c_0$，$C_n(s)=d_6s^6+d_5s^5+d_4s^4+d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0$，这里 $c_5=d_6=d_1=1$，$c_4=d_5=d_1=c_0=3.863\,7$，$c_3=d_4=d_2=c_1=7.46\,4$，$c_2=d_3=9.141\,5$. 表1与表2分别作出 $D_n(s)$ 与 $C_n(s)$ 的降阶系数．

$C_n(s)$ 降一阶模型为 $C_{n-1}(s)$，有

$$\begin{aligned} C_{n-1}(s) &= C_4(s) = C_4(1)s^4 + C_3(1)s^3 + C_2(1)s^2 + C_1(1)s + C_0(1) \\ &= c_4s^4 + (c_3 - \frac{c_5}{d_5}d_3)s^3 + C_2(1)s^2 + (c_1 - \frac{c_5}{d_5}d_1)s + c_0. \end{aligned} \tag{19}$$

$C_{n-1}(s)$ 再降一阶的模型为

$$C_3(s) = C_3(2)s^3 + C_2(2)s^2 + C_1(2)s + C_0(2)$$

$$=C_3(1)s^3+(C_2(1)-\frac{C_4(1)d_2(1)}{d_4(1)}s^2+C_1(1)s+(C_0(1)-\frac{C_4(1)}{d_4(1)}d_0(1)). \qquad (20)$$

表1 $d_k(i)$系数表①

i 值	$d_6(i)$	$d_5(i)$	$d_4(i)$	$d_3(i)$	$d_2(i)$	$d_1(i)$	$d_0(i)$
0	1.000 0	3.863 7	7.464 0	9.141 5	7.464 0	3.863 7	1.000 0
1		3.863 7	5.098 1	9.141 5	6.464 0	3.863 7	1.000 0
2			5.098 1	4.242 1	6.464 0	3.105 8	1.000 0
3				4.242 1	2.731 5	3.105 8	1.000 0
4					2.731 5	1.552 8	1.000 0
5						1.552 8	1.000 0

① $d_k(i)$中的 i 为降阶序号.表2 $C_n(i)$中的 i 也同

其他降阶的模型与上述结构类似．表2为 $C_n(i)$系数的计算结果．

表2 $C_n(i)$系数表

i 值	$C_5(i)$	$C_4(i)$	$C_3(i)$	$C_2(i)$	$C_1(i)$	$C_0(i)$
0	1.000 0	3.863 7	7.464 0	9.141 5	7.464 0	3.863 7
1		3.863 7	5.098 0	9.141 5	6.464 0	3.863 7
2			5.098 0	4.242 6	6.464 0	3.105 8
3				4.242 6	3.091 6	3.105 8
4					3.091 6	1.552 6
5						1.552 6

由式(14)知道 J_6 为

$$J_6=\frac{C_5}{2d_6d_5}+\frac{C_4(1)}{2d_5(1)d_4(1)}+\frac{C_3(2)}{2d_4(2)d_3(2)}+\frac{C_2(3)}{2d_3(3)d_2(3)}$$
$$+\frac{C_1(4)}{2d_2(4)d_1(4)}+\frac{C_0(5)}{2d_1(5)d_0(5)}=1.392\,9. \qquad (21)$$

若将一个六阶系统分散成立3个二阶系统,每个二阶系统均调整到具有最优的闭环传递函数[5]

$$W(s)=\frac{1}{(s^2+1.414\,2s+1)}, \qquad (22)$$

则知在单位阶跃输入信号作用下,误差函数为[4]

$$E(s)=(c_1s+c_0)/(d_2s^2+d_1s+d_0)\triangleq C_2(s)/D_2(s), \qquad (23)$$

其中 $d_2=d_0=c_1=1, d_1=c_0=1.414\,2$. 式(23)分母与分子多项式各降一阶为

$$C_1(s)/D_1(s)=c_0/(d_1s+d_0), \qquad (24)$$

故知干扰落在最后一个分散系统,其准则值为

$$J_2=c_1/2d_2d_1+c_0/2d_1d_0=0.853\,5. \qquad (25)$$

当干扰落在前两个分散系统的情况可由图1说明．对于干扰 $f_2(s)$落在(Ⅰ)分散系统的场合,$f_2(s)$首先经(Ⅰ)分散子系统输出信号 $R_3(s)$,再影响主控变量 $Y(s)$的误差 $E(s)$. 即

$$E(s)=\frac{d_2s_2+d_1s}{d_2s^2+d_1s+d_0}\cdot\frac{1}{d_2s_2+d_1s+d_0}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{c_1^* s + c_0^*}{d_4^* s^4 + d_3^* s^3 + d_2^* s^2 + d_1^* s + d_0^*}, \tag{26}$$

式中 $c_0^*=d_1=1.414\ 2, c_1^*=d_2=1, d_4^*=d_0^*=1, d_3^*=2d_2d_1=2.828\ 4, d_2^*=2d_2d_0+d_1^2=4, d_1^*=2d_1d_0=2.828\ 4$. 或写成

$$E(s) = (s + 1.414\ 2)/(s^4 + 2.828\ 4s^3 + 4s^2 + 2.828\ 4s + 1). \tag{27}$$

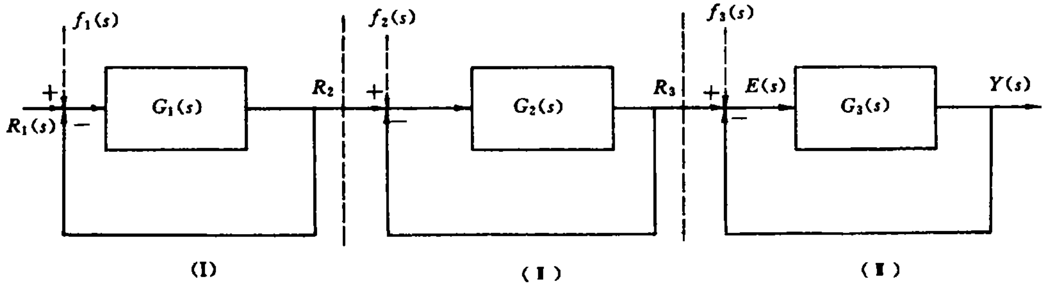

图 1　六阶系统三段分散结构图

式(27)的分母与分子多项式，依次进行降阶可得到 $D_n(s)$ 序列为

$$s^4+2.828\ 4s^3+4s^2+2.828\ 4s+1$$
$$2.828\ 4s^3+3s^2+2.828\ 4s+1$$
$$3s^2+1.885\ 6s+1$$
$$1.885\ 6s+1$$

$C_n(s)$ 序列：$C_{n-2}(2)$ 为 $s+1.414\ 2$；$C_{n-3}(3)$ 为 $1.414\ 2$. 故有

$$2J_2=\frac{C_1(2)}{2d_2(2)d_1(2)}+\frac{C_0(3)}{2d_1(3)d_0(3)}=0.088\ 4+0.375\ 0=0.463\ 4.$$

同理，可以求出 $f_3(s)$ 落在(Ⅲ)分散子系统的准则函数值为 $3J_2=0.573\ 2$. 不管干扰处于何种分散区域，分散后的系统比分散前的系统有更高的调节品质，即 J 值更小．图 2 分别表示分散前及分散后三种情况的系统响应曲线．图中曲线 a 为原六阶系统的响应；曲线 b，c，d 分别为 3 个分散二阶系统的响应，其中 b 干扰位于(Ⅲ)子系统，c 干扰位于(Ⅱ)子系统，d 干扰位于(Ⅰ)子系统．无论是 b，c 或 d，控制品质都较 a 有较大改善．

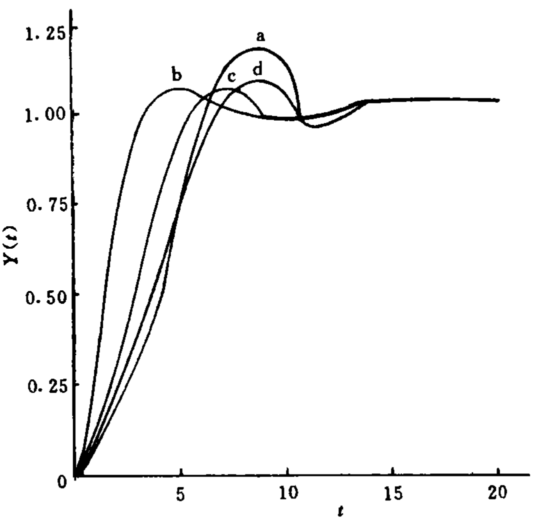

图 2　分散前后系统单位阶跃响应过程比较

一个六阶的系统还可以分散成两个三阶系统的串联结构．此时，最后一级分散子系统，在单位阶跃扰动的作用下，其误差函数为

$$E(s)=\frac{d_3s^2+d_2s+d_1}{d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0}, \tag{28}$$

式中$d_3=1, d_2=3, d_1=2, d_0=1$. 准则函数值的计算结果为$J_3=0.866\,7$. 当干扰作用于第一级分散子系统时，有 $E(s)=c(c_2s^2+c_1s+c_0)/(d_6s^6+d_5s^5+d_4s^4+d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0)$，其中 $c_2=1$，$c_1=3$，$c_0=2$；$d_6=d_0=1, d_5=d_1=3.863\,7, d_4=d_2=7.464, d_3=9.141\,5$. 准则函数值的计算结果为 $2J_3=0.933\,6$. 上述结果，我们不难得出分散子系统的阶次以二阶为最佳的结论．

2 结束语

无论从系统的调节时间，或者系统品质准则函数值和系统的可靠度分析看，分散集中系统均有较理想的结果．从这三个不同的角度分析，均得到分散子系统的阶次以二阶系统最为理想．

参 考 文 献

1 王永初．自动调节系统工程设计．北京：机械工业出版社，1983. 42～50

2 Mahmord M S, Singh M G. Large seals systems modelling. Oxford: Pergamon Press, 1981. 302～337

3 Richard C D. Moder control system. New York: Addison-Wesley, 1991. 264～308

4 王永初．系统的分散与集中决策(Ⅰ). 华侨大学学报(自然科学版)，1994，15(2)：200～204

5 Prank L L. Optimal control. New York: John. Wiley & Son., 1988. 322～333

Decision about Decentralization and Centralization of System (Ⅱ) Analysis of the Effect of Decentralized Control

Wang Yongchu

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Decentralized and centralized system is an important control system of industrial processes. Appropriate dispersion degree helps to improve the performance indices of a system, by which the speed of dynamic response and the integral quantity of error-time can be improved distinctly in particular. Several principles for choosing dispersion of system are proposed and proved by simulation and theoretical analysis.

Keywords dispersion degree, performance index of system, optimal control