

# 环状管网水力计算的图论方法\*

陈 钢 军

(华侨大学建筑设计院, 泉州 362011)

**摘要** 把图论这一现代数学工具引入环状管网水力计算中, 建立起环状管网的图模型. 导出未知数和管网环数相等的矩阵方程式, 并构造计算流量的迭代格式, 方便地解决了环状管网管段的流量分配问题.

**关键词** 管网, 水力计算, 图论

**分类号** TU 82.3

环状管网是工程中常采用的供水形式之一. 由于大型环状管网具有多连通性质, 拓扑关系复杂, 加之管段水力计算的非线性, 使得管网中管段流量的分配显得十分繁琐和复杂. 本文把图论这一现代数学工具引入环状管网水力计算中, 建立环状管网的图模型. 利用图论的定义、表达式和若干重要结论, 导出管网流量分配的矩阵方程式, 并构造计算流量的迭代格式. 因此, 大大减少计算工作量和提高计算精度.

## 1 环状管网的图模型

图1所示为一简单环状管网的示意图. 在研究其拓扑关系时, 可以把管网看成是一个由若干顶点(节点)和边(管段)组成的线图, 用  $G(V, E)$  表示. 其中  $V$  为所有顶点的集合, 记为  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$ ;  $E$  为所有边的集合, 记为  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_P\}$ .  $M, P$  分别为节点和管段的个数. 若在各边上设局部自然坐标  $W$  来规定它的方向, 那么图  $G(V, E)$  就成为一个有向图. 顶点与边之间的关系可用关联矩阵  $B$  描述. 定义为

$$B = (b_{ij})_{M \times P},$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j \in \text{Inc}^+(v_i), \\ -1 & e_j \in \text{Inc}^-(v_i), \\ 0 & \text{其它}, \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\text{Inc}^+(v_i)$  为以  $v_i$  为始端的所有有向边的集合,

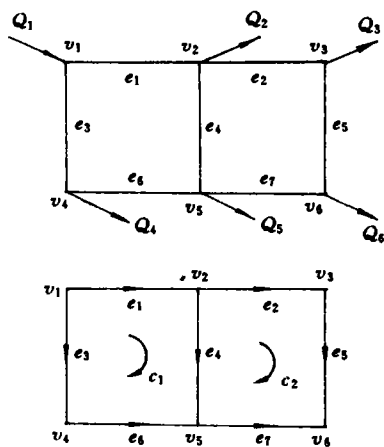


图1 简单环状管网图模型

\* 本文 1994-04-06 收到

$Inc^-(v_i)$  为以  $v_i$  为终端的所有有向边集合. 不难证明,  $B$  的秩为  $M-1$ , 即它的  $M$  个行向量是线性相关的. 若在  $B$  中划去对应于某一顶点的行, 则得到以该顶点为参考点的基本关联矩阵  $B_f$ .

环状管网一般有若干个闭合管道环路组成, 这个闭合环路形成了图  $G(V, E)$  的基本回路. 所有基本回路的集合用  $C$  表示, 即  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_L\}$ , 其中  $L$  为环路个数. 图论中证明了下列关系<sup>[1]</sup>

$$L = P - M + 1. \quad (2)$$

若对各基本回路规定绕行方向, 则基本回路和边之间的关系, 可用基本回路矩阵  $C_f$  描述. 定义为

$$C_f = (C_{ij})_{L \times P}, \quad C_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j \in Con^+(c_i), \\ -1 & e_j \in Con^-(c_i), \\ 0 & \text{其它}, \end{cases} \quad (3)$$

式中  $Con^+(c_i)$  为所有构成回路  $c_i$  且方向与  $c_i$  一致的边的集合,  $Con^-(c_i)$  为所有构成  $c_i$  但方向相反的边的集合.  $B_f$  和  $C_f$  之间满足

$$B_f C_f^T = 0. \quad (4)$$

图  $G(V, E)$  可以分解为生成树  $T$  及其余树  $T_c$ , 而基本回路即为余树  $T_c$  的各边所对应的回路. 若将基本回路矩阵重新排列, 使余树的边在前面, 则  $C_f$  可写成分块矩阵形式  $C_f = [C_{11}, C_{12}]$ , 其中  $C_{11}$  为  $L \times L$  的可逆矩阵. 再将基本关联矩阵中的边的次序作同样的排列, 即有  $B_f = [B_{11}, B_{12}]$ . 把式(4)也展成相应的分块矩阵形式, 可解得

$$C_f^T = \begin{bmatrix} I \\ -B_{12}^{-1}B_{11} \end{bmatrix} C_{11}. \quad (5)$$

矩阵  $B$  和  $C_f$  描述了图  $G(V, E)$  的所有拓扑关系, 对于图 1 所示的图模型, 其关联矩阵  $B$  和回路矩阵  $C_f$  为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

## 2 环状管网流量计算

根据管网中水流连续性原理<sup>[2]</sup>, 任一节点处流进和流出的流量应相等. 当假定管段中水流方向和图  $G(V, E)$  各边自然坐标方向一致后, 即可由图论的定义表示流量平衡条件为

$$\sum_{e_j \in Inc^+(v_i)} Q_{e_j} - \sum_{e_j \in Inc^-(v_i)} Q_{e_j} - Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (6)$$

其中  $Q_{e_j}$  为管道  $e_j$  中的流量,  $Q_i$  为已知的从节点  $i$  流出外部或从外部流入节点  $i$  的集中流量. 以流出为负, 流入为正. 若对所有节点列出此方程, 则可用关联矩阵表示为  $BQ_B = Q$ . 其中  $Q_B = [Q_{e_1}, Q_{e_2}, \dots, Q_{e_p}]^T$ ,  $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_M]^T$ . 任取一顶点为参考点, 则有

$$B_i Q_B = Q_i, \quad (7)$$

其中  $Q_i$  为  $Q$  中划去参考点已知的节点集中流量后的列阵. 当上述流量平衡条件满足时, 管网中各管段流量并不相互独立, 它们可用选定的一组线性无关的流量的组合表示. 从图论知道, 如果  $Q_i$  是图  $G(V, E)$  的某一生成树  $T$  各边上的流量, 则其余树  $T_c$  对应边上的流量  $Q_c$  是线性无关的. 因此把式(7)写成分块形式有

$$[B_{11}, B_{12}] \begin{Bmatrix} Q_c \\ Q_i \end{Bmatrix} = Q_i. \quad (8)$$

由式(8)可解得

$$Q_i = B_{12}^{-1} Q_i - B_{12}^{-1} B_{11} Q_c. \quad (9)$$

利用式(5), 并记  $A = \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{12}^{-1} Q_i \end{Bmatrix}$ , 即可得到

$$Q_B = C_i^T C_{11}^{-1} Q_c + A. \quad (10)$$

现在问题转化为关于一组线性无关的流量  $Q_c$  的求解, 问题的未知数从  $P$  个减少到  $L$  个. 为了确定  $Q_c$ , 可引入能量守恒原理, 即要求各闭合环路的水头损失的代数和等于零. 用图论定义可表示为

$$\sum_{e_j \in Com^+(C_i)} S_{e_j} Q_{e_j}^2 - \sum_{e_j \in Com^-(C_i)} S_{e_j} Q_{e_j}^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (11)$$

对所有环路列出式(11), 则可用基本回路矩阵表示为

$$C_i S Q_B^2 = 0, \quad (12)$$

式中  $Q_B^2$  表示列阵  $Q_B$  中元素自身的平方,  $S = \text{diag}[S_{e_1}, S_{e_2}, \dots, S_{e_p}]$  表示管段的阻抗; 当管段流动处于不同区时, 其  $S_{e_i}$  的取值不同.

(a) 若流动同时处于层流区时, 有  $S_{e_i} = K_{e_i} Q_{e_i}^{-1}$ , 其中  $K_{e_i}$  为常数, 与边界粗糙程度有关. 此时式(12)变为

$$C_i K Q_B = 0, \quad (13)$$

式中  $K = \text{diag}[K_{e_1}, K_{e_2}, \dots, K_{e_p}]$ . 把式(10)代入式(13)可得

$$Q_c = -[C_i K C_i^T C_{11}^{-1}]^{-1} C_i K A. \quad (14)$$

求得  $Q_c$  后, 不难由式(10)求得所有的管段流量  $Q_B$ .

(b) 若流动处于阻力平方区, 此时阻抗  $S_{e_i}$  取作常数, 把式(10)代入式(12), 得到一组关于  $Q_c$  的非线性方程组

$$C_i S [C_i^T C_{11}^{-1} Q_c + A]^2 = 0. \quad (15)$$

依上式, 我们建立如下增量迭代格式.

设  $Q_c$  的第  $i$  次值  $Q_c^i$  并不满足式(15), 而具有余量  $\epsilon^i$ , 第  $i+1$  次值  $Q_c^{i+1} = Q_c^i + \Delta Q_c^{i+1}$  满足式(15), 即有

$$C_i S [C_i^T C_{11}^{-1} Q_c^i + A]^2 = \epsilon^i. \quad (16)$$

$$C_r S [C_r^T C_{11}^{-1} (Q_c^i + \Delta Q_c^{i+1}) + A]^2 = 0. \quad (17)$$

由式(17)减式(16)并略去  $\Delta Q_c^{i+1}$  的二阶小量, 即可得到关于求解增量  $\Delta Q_c^{i+1}$  的迭代格式

$$-2C_r S [C_r^T C_{11}^{-1} Q_c^i + A] \times (C_r^T C_{11}^{-1}) \Delta Q_c^{i+1} = \epsilon^i, \quad (18)$$

式(18)中运算符号  $\times$  表示前后两矩阵行元素相乘并具有运算优先性质. 例如若  $F = \{f_i\}_{n \times 1}$ ,  $G = [g_{ij}]_{n \times m}$ , 则  $F \times G = [f_i g_{ij}]_{n \times m}$ . 具体迭代过程如下: 首先假设一组  $Q_c$ , 代入式(16)算得  $\epsilon$ , 再由式(18)算得流量增量  $\Delta Q_c$ , 进而得到修正后的  $Q_c$ , 判断  $\delta = \max |\frac{\Delta Q_c}{Q_c}|$  是否大于给定误差, 满足时迭代结束; 若不满足则采用修正后的  $Q_c$  进行新一轮迭代. 求得满足精度要求的  $Q_c$  后, 同样可由式(10)求得全部管段的流量. 迭代计算过程的框图见图2.

### 3 算例及结论

根据上述方法, 可以很方便地编制计算程序, 对任何复杂的环状管网进行水力计算. 下面给出一个实际算例, 并同已知结果作比较.

图3为一个7环、15个结点、21个管段的管网. 假定各管段水流方向和规定各环路的基本绕行方向如图3所示, 那么各管段的  $S$  值则如表1所示. 取  $T = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_{20}\}$  为图  $G(V, E)$  的生成树, 则  $T_c = \{e_3, e_6, e_7, e_8, e_{12}, e_{18}, e_{21}\}$  为其余树. 由此便有  $Q_c = \{Q_{e_3}, Q_{e_6}, Q_{e_7}, Q_{e_8}, Q_{e_{12}}, Q_{e_{18}}, Q_{e_{21}}\}^T$ . 取同文献[3]相同的初始流量  $Q_c^0 = \{114.9, 84.7, 40, 57.9, 41.4, 25, 28\}^T$ , 代入式(18), 并经3次迭代, 即可达到最大相对误差小于  $10^{-4}$  的精度要求. 此例所求的结果列于表1, 相应的各环水头损失的闭合差则列于表2. 对于同样的初始流量, 文献[3]基于极值原理和利用最优化方法, 经8次迭代的结果, 也同时列入表1, 2以作比较.

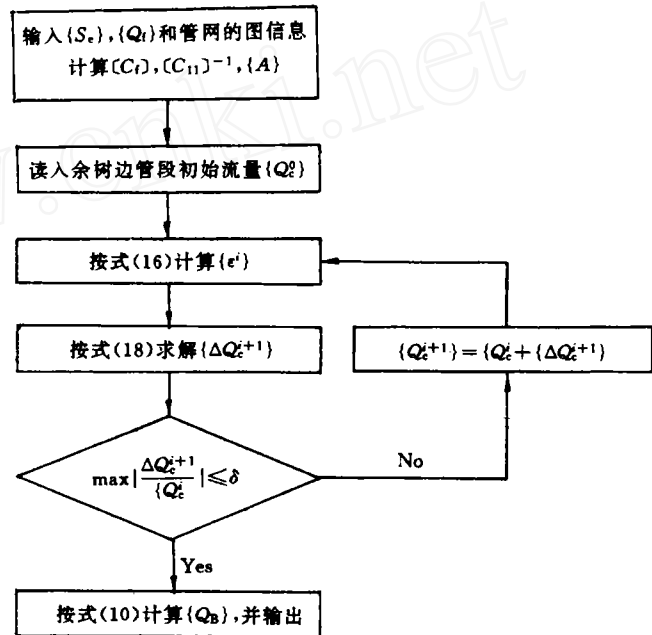


图2 计算框图

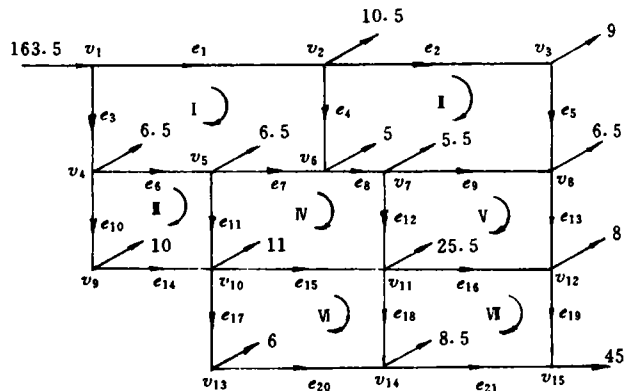


图3 环状管网算例示意图

表 1 各管段流量( $L \cdot s^{-1}$ )

管 段	1	2	3	4	5	6	7
$S/m \cdot s^2 \cdot L^{-2}$	0.0011	0.0348	0.000137	0.00284	0.0201	0.000287	0.00088
本文结果	52.35	15.07	111.15	26.78	6.07	81.87	40.37
文献[3]	51.11	14.86	112.39	25.75	5.86	83.16	41.51
管 段	8	9	10	11	12	13	14
$S/m \cdot s^2 \cdot L^{-2}$	0.0011	0.0135	0.00386	0.00363	0.00116	0.0268	0.0268
本文结果	62.15	13.23	22.78	35.00	43.41	12.81	12.78
文献[3]	62.26	13.32	22.73	35.15	43.44	12.68	12.73
管 段	15	16	17	18	19	20	21
$S/m \cdot s^2 \cdot L^{-2}$	0.0067	0.0215	0.0219	0.00483	0.00486	0.034	0.00483
本文结果	22.60	14.59	14.17	25.92	19.41	8.17	25.59
文献[3]	22.90	14.81	13.98	26.03	19.49	7.98	25.51

表 2 各环水头损失的闭合差

环号	I	II	III	IV	V	VI	VII
本文结果	0.000029	-0.00195	0.00037	-0.00174	0.000206	-0.00066	-0.000167
文献[3]	-0.48	-0.17	0.13	-0.02	-0.19	0.33	0.15

从上面算例可以看出,本文的方法借助图论这一有力的数学工具,把复杂的管网水力计算转化为求解未知数与环路数目的相当的代数方程组的计算.它无需设置满足流量连续的所有管段的初始流量,并具有迭代收敛快,精度高,容易在计算机实现计算等优点,可以方便地应用于管网的工程设计.

### 参 考 文 献

- 1 卢开澄.图论及其应用.北京:清华大学出版社,1984.60~81
- 2 华东水利学院.水力学,上册.北京:科学出版社,1983.221~226
- 3 李 榕.有压管网流动的最小能量损失原理及管网计算的新途径.西安冶金建筑学院学报,1986,(3):73~80

## A Method of Graph Theory for Calculating Water Power in the Ring-Formed Pipe Network

Chen Gangjun

(Des. Inst. of Arch., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** A graph model of ring-formed pipe network is established by introducing graph theory as a modern mathematical tool into the calculation of water power in the ring-formed pipe network. On this basis, the matrix equation where the unknown number equals to ring number is derived; and the iterative formula suitable for flow calculation is constructed. Thus the flow distribution in the pipe segment of the ring-formed pipe network is solved easily.

**Keywords** pipe networks, Hydraulic computation, graph theory