第15卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 15 No. 4
1994年10月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct. 1994

非线性波方程的数值解法*

曾 文 平

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 用递推去耦法解 Sine Gordon 非线性双曲型偏微分方程的隐式差分方程组.

关键词 非线性波方程，数值解法，递推去耦法，Sine Gordon 方程，隐式差分方程组，秩一校正法

分类号 O 241.82

在电磁场、量子力学等问题中，经常会遇到解下列一维非线性波 Sine Gordon 偏微分方程的初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\sin v,\\&v(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\&\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=h(t),\quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,t)=k(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这是一个非线性偏微分方程，我们用差分格式逼近，就得到一个隐式差分方程组，它是个三对角线方程组，文[1]用群显式法解此方程组，但精度不很高，现用递推去耦法解它.

1 差分格式的构造

我们用在 $j+1,j,j-1$ 时间层的一般的权平均隐式有限差分近似式(1)，其差分格式为

$$\left.\begin{aligned}&-\alpha\lambda^2u_{i-1,j+1}+(1+2\alpha\lambda^2)u_{i,j+1}-\alpha\lambda^2u_{i+1,j+1}=(1-2\alpha)\lambda^2u_{i-1,j}\\&\qquad+2[1-(1-2\alpha)\lambda^2]u_{i,j}+(1-2\alpha)\lambda^2u_{i+1,j}+\alpha\lambda^2u_{i-1,j-1}\\&\qquad-(1+2\alpha\lambda^2)u_{i,j-1}+\alpha\lambda^2u_{i+1,j-1}-(\Delta x)^2\sin u_{i,j}\quad(i=1,2,\cdots,n),\\&u_{i0}=f(x_i),\ u_{i1}=u_{i0}+\Delta t g(x_i),\\&u_{0j}=u_{2j}-2\Delta x h_j,\ u_{n+1,j}=u_{n-1,j}+2\Delta x k_j,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $\lambda=\Delta x/\Delta t$，为了使得此差分格式无条件稳定，且使式(2)的截断误差为 $0[(\Delta x)^2+(\Delta t)^2]$，我们取 $\alpha=\frac{1}{4}$[1]. 至于非线性双曲型方程的收敛性问题是一个复杂的问题，本文主要从代数角度考虑三对角线方程组的递推去耦法，至于收敛性问题将另文考虑.

方程组(4)给出在 $j+1$ 时间层的将解的三对角方程组，它可用矩阵表示为 $A\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{d}$ 或

* 本文1994-02-26收到；国家教委留学生基金资助项目

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \\ u_{n,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中 $a_i=c_i=-\alpha\lambda^2$, $c_1=a_n=-2\alpha\lambda^2$ 和 $b_i=1+2\alpha\lambda^2$, $i=1,2,\cdots,n$. 向量 $\boldsymbol{d}$ 定义为其分量为

$$\begin{aligned} d_1 =& 2[1-(1-2\alpha)\lambda^2]u_{1j}+2(1-2\alpha)\lambda^2u_{2j}-(1+2\alpha\lambda^2)u_{1,j-1} \\ &+2\alpha\lambda^2u_{2,j-1}-2\alpha\lambda^2\Delta xh_{j+1}-2(1-2\alpha)\lambda^2\Delta xh_j-2\alpha\lambda^2\Delta xh_{j-1}-(\Delta x)^2\sin(u_{1j}), \\ d_i =& (1-2\alpha)\lambda^2u_{i-1,j}+2[1-(1-2\alpha)\lambda^2]u_{i,j}+(1-2\alpha)\lambda^2u_{i+1,j}+\alpha\lambda^2u_{i-1,j-1} \\ &-(1+2\alpha\lambda^2)u_{i,j-1}+\alpha\lambda^2u_{i+1,j-1}-(\Delta x)^2\sin(u_{ij}) \quad (i=2,3,\cdots,n-1), \\ d_n =& 2(1-2\alpha)\lambda^2u_{n-1,j}+2[1-(1-2\alpha)\lambda^2]u_{n,j}+2\alpha\lambda^2u_{n-1,j-1}-(1+2\alpha\lambda^2)u_{n,j-1} \\ &+2\alpha\lambda^2\Delta xk_{j+1}+2(1-2\alpha)\lambda^2\Delta xk_j+2\alpha\lambda^2\Delta xk_{j-1}-(\Delta x)^2\sin(u_{nj}). \end{aligned}$$

在第一时间层由初始条件给出 $u_{i0}=f(x_i)$,第二时间层由初始条件 $u_{i1}=u_{i0}+\Delta t g(x_i)$ 计算出,其他各时间层的解由解方程组(3)算出. 下面我们用递推去耦法解方程组(3).

2 递推去耦法

递推去耦法是建立在逆矩阵的秩一校正法基础上的. 为此,我们先介绍一个引理.

引理[2] 设 G 为 $n\times n$ 阶可求逆的方阵,$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为任意两个 n 维向量,且

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}G^{-1}\boldsymbol{x}\neq-1,$$

则矩阵 $G+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 可求逆,且其逆矩阵可表达为

$$(G+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})^{-1}=G^{-1}-\alpha G^{-1}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}G^{-1}, \quad \alpha=1/(1+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}G^{-1}\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

D. J. Evans 在文[3]中提出了一种递推去耦法,其过程是就 $n=2^p$ 来描述的,且在描述中,个别地方不确切. 我们将分别就 n 为偶数和奇数的情况来叙述它.

1° 假设方阵 A 的阶数 $n=2m$. 把 A 分块为下列形式

$$A=G+\sum_{j=1}^{m-1}\boldsymbol{x}^{(j)}\boldsymbol{y}^{(j)\mathrm{T}}, \tag{5}$$

其中

$$G=\begin{bmatrix} G_1 & & & & \\ & G_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & G_{m-1} & \\ & & & & G_m \end{bmatrix} \triangleq \mathrm{Dlian}\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}.$$

$G_1,G_2,\cdots,G_m$ 为如下形式的 2×2 子矩阵

$$G_j=\begin{bmatrix} \hat{b}_{2j-1} & c_{2j-1} \\ a_{2j} & \hat{b}_{2j} \end{bmatrix}, \quad n=2m,\ j=1,2,\cdots,m,$$

其中

$$\begin{aligned} &\hat{b}_1=b_1,\ \hat{b}_{2j-1}=b_{2j-1}-c_{2j-2}, \qquad j=2,3,\cdots,m, \\ &\hat{b}_n=b_n,\ \hat{b}_{2j}=b_{2j}-a_{2j+1}, \qquad j=1,2,\cdots,m-1. \end{aligned}$$

此外,向量 $\boldsymbol{x}^{(j)}$,$\boldsymbol{y}^{(j)}$ 在第 $2j$ 和 $2j+1$ 位置上有非零元,$j=1,2,\cdots,m-1$,即

$$x^{(j)} = (0,0,\cdots,\overbrace{1,1}^{2j},0,\cdots,0)^{T},$$

$$y^{(j)} = (0,0,\cdots,\overbrace{a_{2j+1},c_{2j}}^{2j},0,\cdots,0)^{T}.$$

u 和 d 可类似于 G 那样分块

$$[u_{1-2},\cdots,u_{(n-1)-n}]^{T}, \qquad [d_{1-2},\cdots,d_{(n-1)-n}]^{T}.$$

然后，我们用引理的秩一校正公式(4)递推地施加于(4)

$$u = (G + \sum_{j=1}^{m-1} x^{(j)} y^{(j)T})^{-1} d. \tag{6}$$

为了说明方便起见，我们以 $m=3$ 为例加以说明．设

$$A = G + x^{(1)} y(1)^{T} + x^{(2)} y^{(2)T},$$

记

$$\overline{G} = G + x^{(1)} y^{(1)T}.$$

利用引理的秩一校正公式(4)于 $\overline{G}$，便得

$$\overline{G}^{-1} = (G + x^{(1)} y^{(1)T})^{-1} = G^{-1} - \alpha_1 G^{-1} x^{(1)} y^{(1)T} G^{-1} = (I - \alpha_1 G^{-1} x^{(1)} y^{(1)T}) G^{-1},$$

其中

$$\alpha_1 = 1/(+ y^{(1)T} G_{-1} x^{(1)}.$$

这时

$$\begin{aligned} u &= (G + x^{(1)} y^{(1)T})^{-1} d \\ &= (\overline{G} + x^{(2)} y^{(1)T})^{-1} d = (I - \alpha_2 \overline{G}^{-1} x^{(2)} y^{(2)T}) \overline{G}^{-1} d. \end{aligned}$$

记 $\overline{G}^{-1} x^{(j)} = g^{(j)} (j=1,2)$，$G^{-1} d = \bar{u}$，$\alpha_1 = 1/(1+y^{(1)T} G^{-1} x^{(1)})$，$\alpha_2 = 1/(1+y^{(2)T} \bar{u}^{-1} x^{(2)})$，则

$$\bar{\bar{u}} = \overline{G}^{-1} d = (I - \alpha_1 g^{(1)} y^{(1)T}) \bar{u},$$

$$\bar{g}^{(2)} = \overline{G}^{-1} x^{(2)} = (I - \alpha_1 g^{(1)} y^{(1)T}) g^{(2)}.$$

由此得到

$$u[I - \alpha_1 \bar{g}^{(2)} y^{(2)T}] \overline{G}^{-1} d = [I - \alpha_2 \bar{g}^{(2)} y^{(2)T}] \bar{\bar{u}}.$$

对一般的 m 可类似推出．

下面我们叙述递推去耦法解三对角方程组(3)的步骤．

第一步　解

$$\bar{u} = \mathrm{Diag}(G_1^{-1}, G_2^{-1}, \cdots, G_m^{-1}) d,$$

其中

$$G_j^{-1} = \frac{1}{\Delta_j} \begin{bmatrix} \hat{b}_{2j} & -c_{2j-1} \\ -a_{2j} & \hat{b}_{2j-1} \end{bmatrix}, \Delta_j = (\hat{b}_{2j} \hat{b}_{2j-1} - a_{2j} c_{2j-1}),\ (j = 1,2,\cdots,m).$$

它可显式地表示为

$$[(\hat{b}_2 d_1 - c_1 d_2)/\Delta_1,\ (-a_2 d_1 + \hat{b}_1 d_2)/\Delta_1,\ \cdots, (\hat{b}_{2m} d_{2m-1} - c_{2m-1} d_{2m})/\Delta_m,$$
$$(-a_{2m} d_{2m-1} + \hat{b}_{2m-1} d_{2m})/\Delta_m]^{T}.$$

第二步　解

$$g^{(j)} = \mathrm{Diag}(G_1^{-1}, G_2^{-1}, \cdots, G_m^{-1}) x^{(j)},\ j = 1,2,\cdots,m.$$

它也可类似地表示为

$$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{2j}$$

$$[0,\cdots,0,-c_{2j-1}/\Delta_j,\hat{b}_{2j-1}/\Delta_j,\hat{b}_{2j+2}/\Delta_{j+1},-a_{2j+2}/\Delta_{j+1},0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}.$$

第三步 秩一校正

$$\text{for}\quad j=1,2,\cdots,m-1$$

$$\alpha_j=1/(1+\boldsymbol{y}^{(j)^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{g}^{(j)}),\ \boldsymbol{u}=(I-\alpha_j\bar{\boldsymbol{g}}^{(j)}\boldsymbol{y}^{(j)^{\mathrm{T}}})\boldsymbol{u}.$$

$$\text{for}\quad i=j+1,\cdots,m-1$$

$$\boldsymbol{g}^{(i)}=(I-\alpha_j\boldsymbol{g}^{(j)}\boldsymbol{y}^{(j)^{\mathrm{T}}})\boldsymbol{g}^{(i)}$$

end

end

2° 如果 A 的阶数 $n=2m+1$，类似 1°中那样分块，只是 G_m 为 3×3 子矩阵. 此时，需另外求出三阶矩阵的逆 矩阵 G_m^{-1}，它较求 2×2 子矩阵的逆阵稍为复杂，但只有这一块而已，其它作法均可按 1°中进行.

参 考 文 献

1 Evans D J, Roomi A S. The numerical solution of the sine gordon partial differential equation by the AGE method. Intern. J. Computer Math., 1990, 37: 79～88

2 南京大学计算数学专业组编. 线性代数. 北京:科学出版社, 1978. 59～70

3 Evans D J. A recursive decoupling method for solving tridiagonal linear systems. Intern. J. Computer Math., 1990, 33:95～102

Numerical Solution of Nonlinear Wave Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For solving implicit difference systems of Sine Gordon nonlinear hyperbolic partial differential equation, the method of recursive decoupling is presented and discussed.

Keywords nonlinear wave equation, numerical solution, recursive decoupling, Sine Gordon equation, implicit difference systems, rank 1 correction