第15卷 第4期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 15 No. 4
1994年10月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 1994

几何分布场合恒加应力寿命试验的 Bayes 分析*

彭 沛　　吴绍敏

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要　在几何分布场合，由恒加应力寿命试验获得定时与定数截尾试验数据，应用两种方法对平均寿命进行点估计，并给出了平均寿命的置信下限估计．

关键词　恒定应力，加速寿命试验，几何分布，贝叶斯估计

分类号　O 213

对高可靠、长寿命的产品，要获得其失效数据相当困难，因其寿命试验时间长、花费大，又不利于产品的更新换代，故通常采用恒定应力加速寿命试验，简称恒加应力试验．因许多离散型的产品，其寿命服从几何分布，故对几何分布的可靠性统计分析是有实用价值的．本文采用回归法与"次序约束"方法对正常应力水平下产品平均寿命进行点估计及置信下限估计．为保证正确估计正常应力水平下的可靠性指标，在应力水平的选择上有一定要求，如低应力水平与正常应力水平不得相差太多，高应力水平也不能过高，以免失效机理发生变化．由此可见高应力水平的失效数据所提供的寿命信息不如低应力水平失效数据所提供的信息准确．但建立回归方程时却是同等的一员，这样建立的方程难免影响低应力水平失效数据的作用．为克服这一缺陷，可应用"次序约束"方法，先将低应力水平的寿命信息综合评定出来，尔后建立回归方程，实践证明其效果显著改善．但有的文章在应用"次序约束"方法时，忽视这样的重要概念，即高应力水平的失效数据可提供低应力水平的寿命信息，而低应力水平的失效数据却无法提供高应力水平的寿命信息，因而其分析出来的结论是不正确的．

1　假定与引理

不同的物理试验模型，数据的处理方法不同．恒加应力试验数据的处理方法是基于下列两个假定[1]．

假定 I　在正常应力水平 s_0 和加速应力水平 $s_1, s_2, \cdots, s_m$，$(s_0 < s_1 < \cdots < s_m)$ 下产品的寿命服从几何分布[2]，在应力水平 s_i 下产品寿命分布为 $G(q_i)$，即

$$P(X = x) = q_i p_i^{x-1}, (p_i + q_i = 1), (x = 1, 2, \cdots); F_i(t) = 1 - p_i^t, (t = 1, 2, \cdots). \quad (1)$$

* 本文1994-01-29收到；国务院侨办自然科学基金资助项目

其中 $q_i>0$ 是失效率，$\theta_i=1/q_i$ 是平均寿命．

假定Ⅱ　产品的平均寿命 θ 与所加应力水平 s 之间有如下关系

$$\theta = e^{a+b\varphi(s)}, \quad \ln\theta = a + b\varphi(s), \tag{2}$$

其中 a,b 是未知参数，$\varphi(s)$ 是应力水平 s 的已知函数．当应力水平 s 是温度时，模型(2)为阿伦尼斯模型，当应力 s 为电压时，模型(2)为逆律模型．

引理　设产品寿命 $X\sim G(q)$．从一批产品中随机抽取 n 只作恒加应力试验，把 n 只分成 m 组，每组 n_i 只 $(i=1,m)$ 分别在加速应力水平 s_i 上 $(i=1,m)$ 作加速寿命试验．在 s_i 上试验到 T_i^*，有 r_i 个失效，其失效时间分别为 $t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i}$，余下 (n_i-r_i) 个未失效，记 $T_i=\sum_{j=1}^{r_i}(t_{ij}-1)+(n_i-r_i)T_i^*$ 为试验总时间．当定时截尾时 T_i^* 是截尾时间，当定数截尾时 $T_i^*=t_{ir_i}$．则 q_i 的似然函数为

$$L(r_i,T_i,q_i) \propto q_i^{r_i}p_i^{T_i} \qquad (i=1,m). \tag{3}$$

证　因 $L(r_i,T_i,q_i)=\dfrac{n_i!}{(n_i-r_i)!}q_i^{r_i}p_i^{\sum_{j=1}^{r_i}(t_{ij}-1)+(n_i-r_i)T_i^*}=\dfrac{n_i!}{(n_i-r_i)!}q_i^{r_i}p_i^{T_i}$.

2　贝叶斯估计

由引理知 $L(r_i,T_i,q_i)\propto q_i^{r_i}p_i^{T_i}\quad(i=1,m)$．取 q_i 的无信息验前分布[3] $\pi(q_i)=q_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$，得 q_i 的后验密度函数为

$$f(q_i|r_i,T_i) = \frac{q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}}{\int_0^1 q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i} = \frac{1}{\mathrm{B}(r_i,T_i)}q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}. \tag{4}$$

在二次损失下 q_i 的贝叶斯估计为 $\hat{q}_i=\mathrm{E}(q_i|r_i,T_i)=\dfrac{1}{\mathrm{B}(r_i,T_i)}\int_0^1 q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i=\dfrac{\mathrm{B}(r_i+1,T_i)}{\mathrm{B}(r_i,T_i)}=\dfrac{r_i}{T_i+r_i}=\dfrac{r_i}{\tau_i}$，$\tau_i=\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}+(n_i-r_i)T_i^*$．得平均寿命 θ_i 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta} = \tau_i/r_i \qquad (i=1,m). \tag{5}$$

对给定的置信水平 $\alpha(0<\alpha<1)$，有 $p(q\leqslant q_u)=1-\alpha$，其中 q_u 是置信上限．由式(4)得

$$\frac{1}{\mathrm{B}(r,T)}\int_0^{q_u}x^{r-1}(1-x)^{T-1}\mathrm{d}x = 1-\alpha.$$

记 $s(q_u)=\dfrac{1}{\mathrm{B}(r,T)}\int_0^{q_u}x^{r-1}(1-x)^{T-1}\mathrm{d}x$，令 $x=f_1y/f_2+f_1y$，$f_1=2r$，$f_2=2T=2(\tau-r)$，$f_1/2=r$，$f_2/2=(\tau-r)$，$\mathrm{d}x=f_1f_2\mathrm{d}y/(f_2+f_1y)^2$．则

$$s(q_u)=\frac{\Gamma(\frac{f_1+f_2}{2})}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\Gamma(\frac{f_2}{2})}\int_0^{f_2q_u/f_1(1-q_u)}\left(\frac{f_1y}{f_2+f_1y}\right)^{r-1}\left(1-\frac{f_1y}{f_2+f_1y}\right)^{T-1}\cdot\frac{f_1f_2}{(f_2+f_1y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{f_2q_u/f_1(1-q_u)}f(y_1f_1f_2)\mathrm{d}y = 1-\alpha,$$

$$f(y,f_1,f_2)=\frac{\Gamma(\frac{f_1+f_2}{2})}{\Gamma(\frac{f_1}{2})\Gamma(f_2/2)}f_1^{f_1/2}f_2^{f_2/2}y^{f_1/2-1}(f_2+f_1y)^{-(f_1+f_2)/2} \qquad (y>0),$$

为第一自由度是 f_1 与第二自由度是 f_2 的F-分布密度函数. 由此可知 $F_\alpha(f_1,f_2)=f_2q_\alpha/f_1(1-q_\alpha)$, 解得 $q_\alpha=1/(1+\frac{f_2}{f_1F_\alpha(f_1,f_2)})$. 即得平均寿命 θ 的 $(1-\alpha)$ 置信下限估计为

$$\hat{\theta}_L(\alpha)=1+f_2/f_1F_\alpha(f_1,f_2)=1+(\tau-r)/rF_\alpha(2r,2(\tau-r)). \tag{6}$$

方法1 由式(5) $\hat{\theta}_i=\frac{\tau_i}{r_i}$, 令 $\eta_i=\ln\hat{\theta}_i$ 及 $\varphi_i=\varphi(s_i)(i=1,m)$. 由数据组 $(\varphi_i,\eta_i)(i=1,m)$, 应用最小二乘法可建立方程

$$\ln\hat{\theta}=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s),\ \hat{\theta}=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\}, \tag{7}$$

其中 $\hat{a}=\overline{\ln\theta}-\hat{b}\bar{\varphi}$, $\hat{b}=[\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\ln\hat{\theta}_i-m\bar{\varphi}\,\overline{\ln\theta}]/\sum_{i=1}^{m}(\varphi_i-\bar{\varphi})^2$, $\bar{\varphi}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i$, $\overline{\ln\theta}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln\hat{\theta}_i$.

由数组 $(\varphi_i,\ln\hat{\theta}_{iL}(\alpha))$, $(i=1,m)$ 可建立回归方程

$$\ln\hat{\theta}_L(\alpha)=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s),\quad \hat{\theta}_L(\alpha)=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\},$$

那么对正常应力 s_0 与 α 即可得 θ_0 与 $\theta_{0L}(\alpha)$ 的估计值

$$\hat{\theta}_0=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)\},\quad \hat{\theta}_{0L}(\alpha)=\exp\{\hat{a}_1+\hat{b}_1\varphi(s_0)\}.$$

方法2 由假定 I 的 $s_1<s_2<\cdots<s_m$, 决定了 $q_1<q_2<\cdots<q_m$. 记 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$, $T=(T_1,T_2,\cdots,T_m)$, $q=(q_1,q_2,\cdots,q_m)$. 由引理知

$$L(r,T,q)=C\prod_{i=1}^{m}q_i^{r_i}(1-q_i)^{T_i}.$$

把 q_i 看作 r.v., 取其无信息验前分布 $\pi(q_i)=q_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$, 则

$$f(q|r,T)=\prod_{i=1}^{m}\frac{q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}}{\int_D\prod_{i=1}^{m}q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i},\qquad D=\{q:q_1<q_2<\cdots<q_m\}. \tag{8}$$

记 $W_m^*=\int_D\prod_{i=1}^{m}q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i, r_i\geqslant 1, (i=1,m)$.

定理1

$$f(q_1|r,T)=W_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\ \sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots$$
$$\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}W(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2)B(q_1|r_1+g_2-j_2,T_1+j_2), \tag{9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&g_m=T_m+r_m-1,g_i=T_i+r_i+g_{i+1}-1\qquad(i=1,m-1),\\
&C_{j_i}=\binom{g_i}{j_i}B(T_{i-1}+j_i,r_{i-1}+g_i-j_i)\qquad(i=2,m),\\
&W(j_m,j_{m-1}\cdots,j_2)=\prod_{i=m}^{2}C_{j_i},\\
&W_m=\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\ \sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}W(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

证 当 $m=4$ 时成立, 由式(8)得

$$f(q_1|r,T)=W^{*-1}\{q_1^{r_1-1}(1-q_1)^{T_1-1}\int_{q_1}^{1}q_2^{r_2-1}(1-q_2)^{T_2-1}\mathrm{d}q_2$$
$$\times\int_{q_2}^{1}q_3^{r_3-1}(1-q_3)^{T_3-1}\mathrm{d}q_3\int_{q_3}^{1}q_4^{r_4-1}(1-q_4)^{T_4-1}\mathrm{d}q_4,$$

重复应用恒等式

$$\int_q^1 x^{r-1}(1-x)^{T-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}(T,r)\sum_{j=T}^{r+T-1}\binom{r+T-1}{j}q^{r+T-1-j}(1-q)^j, \tag{11}$$

r,T 为正整数，得

$$I_4=\int_{q_3}^1 q_4^{r_4-1}(1-q_4)^{T_4-1}\mathrm{d}q_4=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}q_3^{g_4-j_4}(1-q_3)^{j_4},$$

$$I_3=\int_{q_2}^1 q_3^{r_3-1}(1-q_3)^{T_3-1}I_4\mathrm{d}q_3=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\int_{q_2}^1 q_3^{r_3+g_4-1-j_4}(1-q_3)^{T_3+j_4-1}\mathrm{d}q_3,$$

$$I_2=\int_{q_1}^1 q_2^{r_2-1}(1-q_2)^{T_2-1}I_3\mathrm{d}q_2=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\mathrm{B}(T_3+j_4,r_3+g_4-j_4)$$

$$\times\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\binom{g_3}{j_3}\int_{q_1}^1 q_2^{r_2+g_3-1-j_3}(1-q_2)^{T_2+j_3-1}\mathrm{d}q_2$$

$$=\mathrm{B}(T_4,r_4))\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\mathrm{B}(T_3+j_4,r_3+g_4-j_4)$$

$$\times\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\binom{g_3}{j_3}\mathrm{B}(T_2+j_3,r_2+g_3-j_3)\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}\binom{g_2}{j_2}q_1^{g_2-j_2}(1-q_1)^{j_2},$$

$$I_1=\mathrm{B}(T_4,r_4))\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\mathrm{B}(T_3+j_4,r_3+g_4-j_4)$$

$$\times\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\binom{g_3}{j_3}\mathrm{B}(T_2+j_3,r_2+g_3-j_3)\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}\binom{g_2}{j_2}q_1^{r_1+g_2-1-j_2}(1-q_1)^{T_1+j_2-1}$$

$$=\mathrm{B}(T_4,r_4))\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}(C_{j_4},C_{j_3},C_{j_2})\mathrm{B}(q_1|r_1+g_2-j_2,T_1+j_2)$$

$$=\mathrm{B}(T_4r_4))\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}W(j_4,j_3,j_2)\mathrm{B}(q_1|r_1+g_2-j_2,T_1+j_2).$$

$f(q_1|r,T)=I_1/W_4^*$，由 $\int_0^1 f(q_1|r,T)\mathrm{d}q_1=1$，得 $W_4^*=\mathrm{B}(T_4,r_4)W_4$. 故 $f(q_1|r,T)=W_4^{-1}\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}W(j_4,j_3,j_2)\mathrm{B}(q_1|r_1+g_2-j_2,T_1+j_2)$，证毕. 同理可证一般情形.

推论 1　在二次损失下 q_1的贝叶斯估计为

$$\hat{q}_1=W_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}W(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2)\left(\frac{r_1+g_2-j_2}{r_1+T_1+g_2}\right). \tag{12}$$

因为低应力水平的失效数据无法提供高应力水平的寿命信息，反之，高应力水平的失效数据隐含低应力水平的寿命信息，因此估计 q_2时 (r_1,T_1)不起作用. 故易得

推论 2　应用 $s_2<s_3<\cdots<s_m$ 与 $q_2<q_3<\cdots<q_m$ 可得

$$f(q_2|r,T)=W_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots$$

$$\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}W(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2)\mathrm{B}(q_2|r_2+g_3-j_3,T_2+j_3). \tag{13}$$

在二次损失下,q_2的贝叶斯估计为

$$\hat{q}_2 = W_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}W(j_m,j_{m-1},\cdots j_3)\left(\frac{r_2+g_3-j_3}{r_2+T_2+g_3}\right), \tag{14}$$

其中 $W_m \doteq \sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}W(j_m,j_{m-1},\cdots j_3)$.

一般的

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{q}_k = W_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_{k+1}=T_{k+1}+j_{k+2}}^{g_{k+1}}W(j_m,j_{m-1},\cdots j_{k+1})\left(\frac{r_k+g_{k+1}-j_{k+1}}{r_k+T_k+g_{k+1}}\right),\\
&W_m = \sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_{k+1}=T_{k+1}+j_{k+2}}^{g_{k+1}}W(j_m,j_{m-1},\cdots j_{k+1}) \quad (k=1,m-1),\\
&\hat{q} = r_m/T_m.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

则应力水平 s_i 上的平均寿命估计值为 $\hat{\theta}_i=1/\hat{q}_i$. 令 $\eta_i=\ln\hat{\theta}_i(i=1,m)$,利用数$(\varphi_i,\eta_i)(i=1,m)$,可建立预测方程 $\hat{\theta}=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\}$. 显然,它与方法1建立的方程是有区别的.

3 实例分析

取四个加速温度水平:$s_1=463\,\mathrm{K}$;$s_2=493\,\mathrm{K}$;$s_3=513\,\mathrm{K}$;$s_4=533\,\mathrm{K}$. 加速模型取阿伦尼斯模型,$\varphi(s)=1/k_0 s$,$k_1=0.8617\times10^{-4}\mathrm{eV}\cdot\mathrm{K}^{-1}$. 可算得 $\varphi_1=25.0647$,$\varphi_2=23.5595$,$\varphi_3=22.6218$,$\varphi_4=21.7729$. 取加速方程(2)中的 $a=-18$,$b=1$,即取 $\theta_1=1170$,$\theta_2=255$,$\theta_3=102$,$\theta_4=44$. 正常应力水平 $s_0=443\,\mathrm{K}$,$\theta_0=3628$,各应力水平下的模拟数据为

定数截尾	s_1:	156	318	413	689			$r_1=4$	$n_1=10$
	s_2:	55	66	97	104			$r_2=4$	$n_2=10$
	s_3:	5	11	14	52			$r_3=4$	$n_3=10$
	s_4:	3	12	15	27			$r_4=4$	$n_4=10$
定时截尾	s_1:	156	318	413			$T_1^*=500$	$r_1=3$	$n_1=10$
	s_2:	26	55	67	97		$T_2^*=110$	$r_2=4$	$n_2=10$
	s_3:	5	11	14	24	52	$T_3^*=70$	$r_3=5$	$n_3=10$
	s_4:	3	12	15	27		$T_4^*=30$	$r_4=4$	$n_4=10$

由方法1计算得定数的预测方程为

$$\hat{\theta}=\exp\{-17.958\,6+1.001\,6\varphi(s)\}, \tag{I$_a$}$$

$\hat{\theta}_0=3944$,$F_0(t)=1-(0.9997456)^t(t=1,2,\cdots)$,由此可得所有的可靠性指标. 定时的预测方程为

$$\hat{\theta}=\exp\{-17.842\,4+0.996\,17\varphi(s)\};\ \hat{\theta}_0=3\,841,F_0(t)=1-(0.999\,739\,7)^t. \tag{I$_b$}$$

平均寿命置信下限估计,给定置信水平 $\alpha=0.05$,由式(6)$\hat{\theta}_{iL}(\alpha)=1+(\tau_i-r_i)/r_iF_2(2r_i,2(\tau_i-r_i))$,得定数的预测方程为

$$\hat{\theta}_L=\exp\{-18.475\,2+0.995\,7\varphi(s)\}, \tag{L$_a$}$$

$\hat{\theta}_{0L}(0.05)=2015$，$\hat{P}_{0L}=0.9995037$. 定时的预方程为

$$\hat{\theta}_L=\exp\{-18.5077+0.9931\varphi(s)\},\ \hat{\theta}_{0L}(0.05)=1822,\hat{P}_{0L}=0.9994512. \qquad (\mathrm{L_b})$$

用方法2计算，要由计算机完成. 其中定数的情形，$T_1=5706$，$T_2=942$，$T_3=390$，$T_4=215$；$r_1=r_2=r_3=r_4=4$；$g_4=218$，$g_3=611$，$g_2=1556$，$g_1=7265$.

$$W_4=\sum_{j_4=215}^{218}\sum_{j_3=390+j_4}^{611}\sum_{j_2=942+j_3}^{1556}\frac{(389+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!(218-j_4)!}\times\frac{(941+j_3)!(614-j_3)!}{j_3!(611-j_3)!}\frac{(5705+j_2)!(1559-j_2)!}{j_2!(1556-j_2)!},$$

$$I_1=\sum_{j_4=215}^{218}\sum_{j_3=390+j_4}^{611}\sum_{j_2=942+j_3}^{1556}\frac{(389+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!(218-j_4)!}\frac{(941+j_3)!(614-j_3)!}{j_3!(611-j_3)!}\times\frac{(5705+j_2)!(1559-j_2)!}{j_2!(1556-j_2)!}\left(\frac{1560-j_2}{7266}\right),$$

$$\hat{q}_1=I_1/W_4,\qquad \hat{\theta}_1=1/\hat{q}_1=1441.$$

$$W_3=\sum_{j_4=215}^{218}\sum_{j_3=390+j_4}^{611}\frac{(389+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!(218-j_4)!}\frac{(941+j_3)!(614-j_3)!}{j_3!(611-j_3)!},$$

$$I_2=\sum_{j_4=215}^{218}\sum_{j_3=390+j_4}^{611}\frac{(389+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!(218-j_4)!}\frac{(941+j_3)!(614-j_3)!}{j_3!(611-j_3)!}\left(\frac{615-j_3}{1557}\right),$$

$$\hat{\theta}_2=W_3/I_2=260.$$

$$W_2=\sum_{j_4=215}^{218}\frac{(389+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!(218-j_4)!},\ I_3=\sum_{j_4=215}^{218}\frac{(389+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!(218-j_4)!}\left(\frac{222-j_4}{612}\right),$$

$$\hat{\theta}_3=W_2/I_3=112,\quad \hat{\theta}_4=\frac{T_4+r_4}{r_4}=55.$$

再应用回归法得方程

$$\hat{\theta}=\exp\{-17.55597+0.9873\varphi(s)\}, \qquad (\mathrm{II_a})$$

$\hat{\theta}_0=4062$，$\hat{p}_0=0.9997538$. 定时的情形可由式(15)算得 $\hat{\theta}_1=1478$，$\hat{\theta}_2=246$，$\hat{\theta}_3=104$，$\hat{\theta}_4=59$.

再应用回归法得方程

$$\hat{\theta}=\exp\{-17.6243+0.9894\varphi(s)\},\hat{\theta}_0=4001,\hat{P}_0=0.9997501, \qquad (\mathrm{II_b})$$

得各个预测方程预测的 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 及 $\hat{\theta}_0$，$\hat{P}_0$ 列于附表，从表中说明以下四点.

附表　各个预测方程的数值比较表

项目	原始值	$(\mathrm{I_a})$	误差	$(\mathrm{II_a})$	误差	$(\mathrm{I_b})$	误差
a	−18	−17.9586	+0.0414	−17.55597	+0.44403	−17.8424	0.1576
b	1	1.0016	+0.0016	0.9873	−0.0127	0.99617	-3.83×10^{-3}
θ_0	3628	3944	+316	4062	+434	3841	+213
P_0	0.9^37244	0.9^37465	$+2.21\times10^{-5}$	0.9^37538	$+2.94\times10^{-5}$	0.9^37397	1.53×10^{-5}

项目	原始值	$(\mathrm{II_b})$	误差	$(\mathrm{L_a})$	误差	$(\mathrm{L_b})$	误差
a	−18	−17.6243	+0.3757	−18.4752	−0.4752	−18.5077	−0.5077
b	1	0.9894	−0.0106	0.9957	-4.30×10^{-3}	0.9931	-6.90×10^{-3}
θ_0	3628	4001	+373	2015		1822	
P_0	0.9^37244	0.9^37501	$+2.57\times10^{-5}$	0.9^35037		$0.9^{3451}2$	

(1) 只有方程(L_a)与的(L_b)的 $\hat{a}<a$,其余方程的 $\hat{a}>a$. 且 $-0.5077<$误差<0.4403.

(2) 只有方程(I_a)的 $\hat{b}>b$,其余方程的 $\hat{b}<b$,且有 $-4.30\times10^{-3}<$误差<0.0016. (1),(2)两点说明各方程的参数 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$ 同 a,b 的拟合很好.

(3) 方程(I_a),(I_b)及(II_a),(II_b)的 $\hat{\theta}_0>\theta_0$,且(II_a),(II_b)的 $\hat{\theta}_0$大得更多,二者相差更小. 这说明利用 $s_i(i=1,4)$上的数据信息,预测 θ_0时总的趋势偏大. 因低水平的数据无法提供高水平的寿命信息,而高水平的数据隐含有低水平的寿命信息. 应用方法2时,先把高水平中的低水平的寿命信息,综合评定出来,再进行回归,从而导致低水平的寿命信息在回归中的"权重"增大. 因此,预报的 $\hat{\theta}_0$会更大些,这就证实了方法2比方法1更加合理.

(4) $\hat{\theta}_{0L}(0.05)\,|\,(L_a)=2015$, $\hat{\theta}_{0L}(0.05)\,|\,(L_b)=1822$,几乎是一致的,且所有的 $\hat{\theta}_0>\hat{\theta}_{0L}(0.05)$,说明 θ_0置信下限的预测是可行的.

参　考　文　献

1 茆诗松,王玲玲. 可靠性统计. 上海:华东师范大学出版社,1984. 3～27

2 方开泰,许建伦. 统计分布. 北京:科学出版社,1987. 9～105

3 Zhang Y T, Yao Q W. Some maximal informtion and generalized maximal entropy priors. Chinese Journal of applied probability and Statisitics, 1991, (2): 129～221

Bayesian Analysis of Constant Stress Accelerated Life Testing under Geometric Distribution

Pen Pei　　Wu Shaomin

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Under geometric distribution, the point estimate and the fiducial lower limit of average life are given by applying two methods. They are based on the timing, fixed numer, and truncated data from constant stress accelerated life testing.

Keywords constant stress, accelerated life tests, geometric distribution, Bayes estimations