第15卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 15 No. 4
1994年10月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct. 1994

一类高维周期系统的周期解*

王 全 义

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 研究一类高维周期微分系统的周期解的存在性问题. 通过利用指数型二分性和不动点方法,得到一些新结果,即此类系统周期解的存在性、唯一性和稳定性的一些充分性条件.

关键词 微分系统,周期解,存在性,唯一性,稳定性,不动点方法

分类号 O 175.1

文[1]利用 Lyapunov 函数和 Browder 不动点方法,研究了下列高维非线性周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t,x) \tag{1}$$

的周期解的存在性问题,这里 $x\in R^n$,$t\in R$,$A(t)$是 n 阶实连续的函数方阵. 且 $A(t+\omega)=A(t)$,($\omega>0$ 为常数),$f(t,x)$是 $R\times R^n$ 上的 n 维连续函数,且对任意的$(t,x)\in R\times R^n$,$f(t,x)=f(t+\omega,x)$. 本文也研究系统(1)的周期解的存在性、唯一性和稳定性问题.

1 主要结果

定理1 对于系统(1),假设下列(a),(b)两个条件都成立.

(a) $A(t)$的特征根 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)$满足 $\mathrm{Re}(\lambda_j(t)\leqslant-\delta<0$,$j=1,2,\cdots,n$,且 $\|A(t)\|\leqslant K$,$\|\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\|\leqslant K_1$,其中

$$K_1<\frac{1}{2K_0^2},\qquad K_0=\frac{2^{n-1}}{2\delta}(1+\frac{K}{2\delta})^{(n+2)(n-1)/2}.$$

(b) $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\frac{1}{m}\int_0^m\sup\limits_{\|x\|\leqslant m}\|f(t,x)\|\,\mathrm{d}t<\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}{\beta}$,其中

$$\alpha=\frac{1-2K_0^2K_1}{2K_0}>0,\qquad \beta=n\cdot\sqrt{2KK_0}>0.$$

则系统(1)至少存在着一个 ω-周期解.

就系统(1)的周期解的存在性而言,并与文[1]的主要结果定理1比较,本定理具有明显的优点:放宽了对 $\|\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\|$ 充分小的限制,并且给出了它的具体数值;放宽了对 $\|f(t,x)\|$ 的限制,并且也给出了它的具体数值.

---

* 本文1994-01-26收到;福建省自然科学然基金资助项目

定理2 假定系统(1)满足定理1中的条件(a)以及下面的条件,即对任意的 $x_1,x_2\in R^n$,$t\in R$,有

$$\| f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \leqslant L\| x_1-x_2\| ,$$

其中 $0<L<\frac{\alpha}{\beta}$,这里 α 和 β 由定理1中给出.则系统(1)具有唯一的、稳定的 ω-周期解.

2 一些引理

为了证明本文定理,我们必须先证下面一些引理.考虑系统(1)的齐次线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x, \tag{2}$$

这里 $A(t)$,x 如前面所述.

引理1 对于系统(2)而言,假定 $A(t)$ 满足定理1中的条件(a),那么则系统(2)的基本解方阵 $X(t)$,则满足

$$\| X(t)X^{-1}(s)\| \leqslant \beta\cdot \exp(-\alpha(t-s)) \qquad (t\geqslant s), \tag{3}$$

其中 α,β 由定理1中给出.

证明 由引理的条件及文[2]引理5.2.2可知,存在着一个 n 阶的哈密顿对称方阵 $G(t)$,使得

$$A^{\mathrm{T}}(t)G(t)+G(t)A(t)=-I, \tag{4}$$

且满足下列两个条件,即 $\| G(t)\| \leqslant K_0$ 和

$$g_j(t)\geqslant \frac{1}{2n^2K} \quad (j=1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

这里 $g_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$ 是 $G(t)$ 的 n 个不同特征根.

设 $x(t)$ 是系统(2)的任一非零解.取

$$V(t,x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)\cdot G(t)\cdot x(t), \tag{6}$$

则由文[2]定理5.2.4的证明中可得

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{(2)}\leqslant -(1-2K_0^2K_1)\| X\| ^2. \tag{7}$$

由式(5),(6)得

$$\frac{\| x\| ^2}{2n^2K}\leqslant V(t,x)\leqslant K_0\| X\| ^2, \tag{8}$$

从而由式(7),(8)可得

$$\frac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}\leqslant -\frac{(1-2K_0^2K_1)}{K_0}V(t,x),$$

即

$$\frac{1}{V(t,x)}\frac{\mathrm{d}V(t,x)}{\mathrm{d}t}\leqslant -2\alpha, \tag{9}$$

这里 $\alpha=\frac{(1-2K_0^2K_1)}{2K_0}>0$. 设 $s\leqslant t$,在区间 $[s,t]$ 上积分上式的两边,我们可得

$$V(t,x(t))\leqslant V(s,x(s))\exp(-2\alpha(t-s)) \qquad (t\geqslant s), \tag{10}$$

从式(8)可得

$$\frac{1}{2n^2K}\| x(t)\| ^2\leqslant K_0\| x(s)\| ^2\cdot \exp(-2\alpha(t-s)) \quad (t\geqslant s),$$

即

$$\frac{\| x(t) \|}{\| x(s) \|} \leqslant n\sqrt{2K_0K} \cdot \exp(-\alpha(t-s)) \quad (t \geqslant s). \tag{11}$$

设 $X(t)$ 是系统(2)的任意一个基本解矩阵，则

$$\| X(t)X^{-1}(s) \| = \sup_{\| x_0 \| \neq 0} \frac{\| X(t)X^{-1}(s)x_0 \|}{\| x_0 \|},$$

记 $x_1 = X^{-1}(s)x_0$，则

$$\| X(t)X^{-1}(s) \| = \sup_{\| x_1 \| \neq 0} \frac{\| X(t)x_1 \|}{\| X(s)x_1 \|} = \sup_{\| x_1 \| \neq 0} \frac{\| x(t) \|}{\| x(s) \|}$$
$$\leqslant \beta \exp(-\alpha(t-s)) \quad (t \geqslant s), \tag{12}$$

这里 $\beta = n\sqrt{2K \cdot K_0}$. 引理 1 证毕．

引理 2[3]　假设 $g(t)$ 是一个 n 维连续的 ω-周期函数，则对任意的 $t \in R$，有

$$\int_t^{t+\omega} g(s)\mathrm{d}s = \int_0^{\omega} g(s)\mathrm{d}s.$$

引理 3　考虑下列周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + g(t). \tag{13}$$

这里 $A(t)$ 满足引理 1 的所有条件，$g(t)$ 是一个 n 维连续的 ω-周期函数，则系统(13)具有唯一的 ω-周期解 $x(t)$，且它满足

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)X^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s, \tag{14}$$

其中 $X(t)$ 是系统(2)的一个基本解矩阵．

证明　(i) 先证式(14)的右边是有界的．事实上，因为 $g(t)$ 是一个连续的 ω-周期函数，故存在着一个正常数 M 使得 $\| g(t) \| \leqslant M$. 由引理 1 得到 $\| x(t) \| \leqslant \int_{-\infty}^{t} \| X(t)X^{-1}(s) \| \cdot \| g(s) \| \mathrm{d}s \leqslant M\int_{-\infty}^{t} \beta \cdot \exp(-\alpha(t-s))\mathrm{d}s = M\beta/\alpha$，即 $x(t)$ 是有界的．(ii) 直接微分式(14)的两边可知 $x(t)$ 是系统(13)的一个解．(iii) 证明 $x(t+\omega) = x(t)$. 因为系统(2)是周期系统，故有 $X(t+\omega)X^{-1}(s+\omega) = X(t)X^{-1}(s)$. 于是，我们有

$$\begin{aligned} x(t+\omega) &= \int_{-\infty}^{t+\omega} X(t+\omega)X^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s \\ &\xlongequal{s=\tau+\omega} \int_{-\infty}^{t} X(t+\omega)X^{-1}(\tau+\omega)g(\tau+\omega)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} X(t)\, X^{-1}(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = x(t), \end{aligned}$$

即 $x(t)$ 是系统(13)的 ω-周期解．(iv) 因为系统(2)满足指数型二分性，故系统(13)具有唯一的 ω-周期解．引理 3 证毕．

3　定理的证明

3.1　定理 1 的证明

设 $C = \{V(t) \mid V(t)$ 是 R 上的 n 维连续的 ω-周期函数$\}$，则 C 在范数 $\| V \| = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \{ \| V(t)$

$\|\}$下是 Banach 空间．对任意的 $V\in C$,考虑下列周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t,V(t)). \tag{15}$$

由定理的条件及引理 3 可知,系统(15)具有唯一的 ω-周期解

$$x_V(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)f(s,V(s))\mathrm{d}s, \tag{16}$$

其中 $X(t)$是系统(2)的基本解方阵．

现在定义算子 $F:C\longrightarrow C$ 如下

$$FV(t)=x_V(t),\qquad \forall\, V\in C, \tag{17}$$

易见算子 F 的不动点就是方程(1)的 ω-周期解．

为了利用 Schauder 不动点定理,我们需证在 C 中存在着一个紧子集 Y 使得 $F:Y\longrightarrow Y$ 是一个全连续算子．下面将证明这一点．记 $Y_m=\{V|V\in C$ 且 $\|V\|\leqslant m\}$,其中 m 为自然数．

(1) 先证存在着自然数 m_0,使得 $F:Y_{m_0}\longrightarrow Y_{m_0}$. 用反证法,若不然,对任意的自然数 m,都存在着 $V_m\in Y_m$,使得 $\|FV_m\|\geqslant m$. 于是,由定理的条件及引理 1,2 有

$$\begin{aligned}\|FV_m(t)\|&\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|X(t)X^{-1}(s)\|\cdot\|f(s,V_m(s)\|\mathrm{d}s\\&\leqslant\beta\int_{-\infty}^{t}\exp(-\alpha(t-s))\|f(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\&=\beta\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t-(j+1)\omega}^{t-j\omega}\exp(-\alpha(t-s))\|f(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\&\leqslant\beta\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\alpha\omega}\int_{t-(j+1)\omega}^{t-j\omega}\|f(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\&=\beta\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-j\alpha\omega}\int_{0}^{\omega}\|f(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s\\&=\frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}\int_{0}^{\omega}\|f(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{18}$$

因此

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{\|FV_m(t)\|}{m}\leqslant\frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}\cdot\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{1}{m}\int_{0}^{\omega}\|f(s,V_m(s))\|\mathrm{d}s.$$

于是由节 1 定理 1(b)的公式得

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}}\frac{\|FV_m(t)\|}{m}<\frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}}{\beta}=1,$$

即当 m 充分大时，$\|F\,V_m\|<m$. 这就与 $\|F\,V_m\|\geqslant m$ 相矛盾．因此存在着一个自然数 m_0 使得 $g:Y_{m_0}\longrightarrow Y_{m_0}$.

(2) 下面证明$\{FY_{m_0}\}$关于 C 是一个紧子集．因为 $FY_{m_0}\subset Y_{m_0}$,所以$\{FY_{m_0}\}$是一致有界的．设 $R_{m_0}=\{x|\ x\in R^n,\|x\|\leqslant m_0\}$. 因为 $f(t,x)$在有界闭集$[0,\omega]\times R_{m_0}$上是连续的,故可设

$$b=\sup\{\|f(t,x)\|\ |(t,x)\in[0,\omega]\times R_{m_0}\}.$$

因为$\|A(t)\|\leqslant K$ 且对任意的 $V\in Y_{m_0}$, $\|FV\|\leqslant m_0$,又$\frac{\mathrm{d}FV(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)FV(t)+f(t,V(t))$,所以有$\|\frac{\mathrm{d}FV(t)}{\mathrm{d}t}\|\leqslant\|A(t)\|\cdot\|gV(t)\|+\|f(t,V(t))\|\leqslant Km_0+b$. 因此,$\{FY_{m_0}\}$

是等度连续的．于是由 Ascoli-Arzela 定理知$\{FY_{m_0}\}$是一个紧子集．

(3) 下面证明 $F: Y_{m_0} \longrightarrow Y_{m_0}$. 是一个连续算子．对任意的 $V_1, V_2 \in Y_{m_0}$，有

$$gV_1(t) - FV_2(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)X^{-1}(s)[f(s,V_1(s)) - f(s,V_2(s))]\mathrm{d}s. \tag{19}$$

因此由式(18)和(19)得

$$\| FV_1(t) - FV_2(t) \| \leqslant \frac{\beta}{1-\mathrm{e}^{-\alpha\omega}} \cdot \quad \int_0^{\omega} \| f(s,V_1(s)) - f(s,V_2(s)) \| \mathrm{d}s. \tag{20}$$

因为 $f(t,x)$在有界闭集$[0,\omega]\times R_{m_0}$上是一致连续的，故当$\| V_1 - V_2 \| \longrightarrow 0$ 时，$\| f(s,V_1(s)) - f(s,V_2(s)) \| \longrightarrow 0$ 对 $s \in [0,\omega]$上一致成立，从而有$\| FV_1 - FV_2 \| \longrightarrow 0$. 即 $F: Y_{m_0} \longrightarrow Y_{m_0}$. 是连续的．

综上所述，$F: Y_{m_0} \longrightarrow Y_{m_0}$是一个全连续算子．因此由 Schauder 不动点定理得到 F 在 Y_{m_0} 中至少具有一个不动点，即系统(1)至少具有一个 ω-周期解．定理 1 证毕．

3.2　定理 2 的证明

由引理 3 得到系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + f(t,0), \tag{21}$$

具有唯一的 ω-周期解 $x_0(t)$，它可表示为

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s,0)\mathrm{d}s. \tag{22}$$

一般地，下列周期系统

$\dfrac{\mathrm{d}x_{m+1}}{\mathrm{d}t} = A(t)x_{m+1} + f(t,x_m(t))\quad (m=0,1,2,\cdots)$，具有唯一的 ω-周期解 $x_{m+1}(t)$，它可表示为

$$x_{m+1}(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s,x_m(s))\mathrm{d}s \quad (m = 0,1,2,\cdots). \tag{23}$$

设 $L_m = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{\| x_{m+1}(t) - x_m(t) \|\}, m=0,1,2,\cdots$，则由定理的条件得

$$\begin{aligned}
\| x_{m+1}(t) - x_m(t) \| &\leqslant \int_{-\infty}^{t} \| X(t)X^{-1}(s) \| \cdot \| f(s,x_m(s) - f(s,x_{m-1}(s)) \| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \beta \int_{-\infty}^{t} \exp(-\alpha(t-s)) \cdot L \cdot \| x_m(s) - x_{m-1}(s) \| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \beta L \cdot L_{m-1} \int_{-\infty}^{t} \exp(-\alpha(t-s))\mathrm{d}s \\
&= \left(\frac{\beta L}{\alpha}\right) \cdot L_{m-1}.
\end{aligned}$$

此即 $L_m \leqslant \left(\dfrac{\beta L}{\alpha}\right) \cdot L_{m-1}$. 由这个递推公式得 $L_m \leqslant \left(\dfrac{\beta L}{\alpha}\right)^m \cdot L_0$. 由于 $0 < \dfrac{L\beta}{\alpha} < 1$，因此$\{x_m(t)\}$对 $t \in R$ 是一致收敛的．故可设 $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m(t) = x(t)$对 $t \in R$ 一致成立的．因为$\{x_m(t)\}$是连续的 ω-周期函数，故 $x(t)$也是连续的 ω-周期函数．从式(23)的两边取极限得

$$x_{(t)} = \int_{-\infty}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{24}$$

由式(24)的右边可知 $x(t)$是连续可微的，所以直接微分式(24)的两边可知 $x(t)$是系统(1)的

解,即系统(1)至少存在一个 ω-周期解.

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是系统(1)的两个不同的解.取 $u(t)=x(t)-y(t)$,则有 $\frac{du(t)}{dt}=A(t)u(t)+[f(t,x(t))-f(t,y(t))]$. 因此有 $u(t)=X(t)u_0+\int_0^t X(t)X^{-1}(s)[f(s,x(s))-f(s,y(s))]ds$. 从而 $\|u(t)\|\leqslant\|X(t)\|\cdot\|u_0\|+\int_0^t\|X(t)X^{-1}(s)\|\cdot\|[f(s,x(s))-f(s,y(s))]\|ds$. $\leqslant\beta\|u_0\|e^{-\alpha t}+\int_0^t\beta\exp(-\alpha(t-s))\cdot L\cdot\|u(s)\|ds$. 所以 $e^{\alpha t}\|u(t)\|\leqslant\beta\|u_0\|+\beta L\int_0^t e^{\alpha s}\|u(s)\|ds$. 又由 Bellman 不等式[2] 得到 $e^{\alpha t}\|u(t)\|\leqslant\beta\|u_0\|\exp(\beta)$, 此即

$$\|u(t)\|\leqslant\beta\|u_0\|\exp(-(\alpha-\beta). \tag{25}$$

因为 $\alpha-\beta L>0$,故从式(24)可知:当 $t\to+\infty$ 时,$\|u(t)\|\longrightarrow 0$. 因此系统(1)的周期解是稳定的且是唯一的.定理2证毕.

参考文献

1 Wang L, Wang M Q. On periodic solution of higher order nonlinear periodic system. Ann. of Diff. Eqs., 1987, 3(1): 87~110

2 林振声,杨信安.微分方程稳定性理论.福州:福建科学技术出版社,1988.205~214

3 王全义.一类周期微分系统的周期解.华侨大学学报(自然科学版),1993,14(1):13~19

Periodic Solutions to One Class of Higher Dimensional Periodic Systems

Wang Quanyi

(Dept. of Manag. Info. Sic., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The author deals with the existence of periodic solutions to one class of higher dimensional periodic differential systems. By using exponential type bisectability and fixed point method, some new results are obtained. These include existence, unicity, and some sufficient conditions of stability.

Keywords differential system, periodic solution, existence, unicity, stability, fixed point method