

一个计算基本割集矩阵元素的新公式及应用*

陈 荣 年

(华侨大学电子工程系, 泉州 362011)

摘要 从电荷守恒定律导出一个计算基本割集矩阵元素的新公式. 应用此公式可改善割集电压法. 不必选取较抽象的基本割集矩阵, 只需写出较直观的关联矩阵即可.

关键词 割集, 割集电压法, 关联矩阵, 基本割集矩阵元素的公式

分类号 TN 711.109

割集被定义为这样的支路集合: 若移去集合的全部支路, 则余下的网络线图分割成两个独立部分. 基本割集则指割集中必包含 1 条在其它割集中没有出现的树支路. 过去对此一贯是从网络线图的几何描述来定义的^[1,2]. 虽然比较直观, 但缺乏物理的依据. 本文从电荷守恒定律推导出基本割集矩阵, 得到一个可以计算基本割集矩阵元素的新公式, 据此不仅对基本割集可进行各种计算, 而且使割集的概念开始有了定量的意义.

1 电荷守恒定律对 N 个节点的解

电荷守恒定律对网络中 N 个节点写出的方程组为

$$\sum_{i=1}^B \int_{S_{\mu}} j_i \cdot dS_{\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

式中 S_{μ} 代表 S_{μ} 被第 i 支路电流 j_i 所穿过的面积, 而 S_{μ} 代表包围第 μ 节点的小球面; 式(1)中的方向余弦定义出关联矩阵元素^[3]

$$a_{\mu i} = \cos(j_i, dS_{\mu}) = \begin{cases} 1 & (j_i \text{ 与 } dS_{\mu} \text{ 关联且方向平行}), \\ -1 & (j_i \text{ 与 } dS_{\mu} \text{ 关联且方向逆平行}), \\ 0 & (j_i \text{ 不与 } dS_{\mu} \text{ 关联}). \end{cases} \quad (2)$$

若各支路的导线横截面均相同, 则式(1)表为

$$\sum_{i=1}^B a_{\mu i} j_i = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

式中 B 是网络中支路数. 可以证明此方程组的系数组成的矩阵的秩为 $N-1$, 因而把 $B-N+1$ 个独立变量电流 $j_{k'}$ (其支路称链支) 移到方程组(3)的每个方程的右边

$$\sum_{i=1}^{N-1} a_{\mu i} j_i = \sum_{k'=N}^B (-a_{\mu k'}) j_{k'} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad (4)$$

* 本文 1994-01-28 收到, 福建省自然科学基金资助项目

解得非独立变量电流 j_i (其支路称树支) 为

$$j_i = \sum_{k=N}^B g_{ik} j_k \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (5)$$

式中

$$g_{ik} = D_{ik}/D, \quad (6)$$

D 为方程组(4)左边系数组成的 $N-1$ 阶行列式, D_{ik} 是把方程组(4)右边含 j_k 的系数项 $-a_{ik}$ 作为一列代替 D 中第 i 列得到的 $N-1$ 阶行列式.

2 证明方程组(3)的系数组成矩阵的秩为 $N-1$

先证明: 若 $N-1$ 条树支不形成任一闭合回路以及在 $N-1$ 个节点中, 每 1 个节点至少被 1 条树支所连通, 则行列式 D 不为零.

按行列式 D 的元素 a_{μ} , 第 1 个下角标 μ 代表节点数, 第 2 个下角标 i 代表树支数. 这就表明, D 的第 μ 行代表网络线图中第 μ 个节点, 第 i 列代表网络线图中第 i 条树支. 又按式(2)知, 当树支 i 与节点 μ 连通时, a_{μ} 取值为 ± 1 ; 当不连通时, a_{μ} 为零. 因此, 行列式 D 的线图可表示出网络线图上的 $N-1$ 条树支与 $N-1$ 个节点连通的情况.

现设在 D 的线图中出现了任一闭合回路, 令其支路数和节点数均为 m ($3 \leq m \leq N-1$), 设法使它们编号为 $1, 2, \dots, m$. 若这些节点都不属第 N 个最后节点, 则位于 D 中的左上角的这个 m 阶子式的每一列都含有一个 $+1$ 和 -1 的非零元素, 使 m 行相加之和为零, 致使这个子式也为零. 另外, 对 D 的前 m 列, 因两个非零元素都已分布在上述的前 m 行内, 所以在 m 行之后的各行中的元素全是零. 按 Laplace 展开定理, 把 D 按前 m 列展开, 容易得出行列式 D 为零^[4]. 若 D 的线图中 $N-1$ 条树支不形成任一闭合回路, 就排除了上述使行列式 D 为零的情形.

再设 D 中第 μ 节点至少被 1 条树支 i 所连通, 则行列式 D 的第 μ 行至少有 1 个非零元素. 当 μ 依次取 $1, 2, \dots, N-1$ 时, 就排除了因某行元素全是零, 致使 D 为零的情形. 根据证明第 1 点, 若在上述选定的树支所对应的 D 线图中任意加进一条链支, 则必出现一个闭合回路使其 N 阶行式为零. 可见, 当满足上述两个条件时, 行列式 D 的阶数 $N-1$ 就是不为零子式的最高阶数. 由此证明了方程组(3)的系数组成的矩阵的秩等于 $N-1$. 故知, 式(4)成立, 方程组(3)中独立方程为

$$\sum_{i=1}^B a_{\mu i} j_i = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, N-1). \quad (7)$$

3 一个计算基本割集矩阵元素的新公式

式(5)移项并重新编写支路数为

$$j_i = \sum_{k=1}^l g_{ik} j_k = 0 \quad (i = l+1, l+2, \dots, B). \quad (8)$$

引入系数

$$g_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{当 } k' = i \quad (i = l+1, l+2, \dots, B), \\ 0, & \text{当 } k' \neq i \quad (k' = l+1, l+2, \dots, B). \end{cases} \quad (9)$$

式(8)表为

$$\sum_{k=1}^B q_{ik} j_k = 0 \quad (i = l+1, l+2, \dots, B), \quad (10)$$

式中 k' 除代表链支 ($k'=1, 2, \dots, l$) 外, 也代表树支 ($k'=l+1, l+2, \dots, B$). 又式(10)中系数 $q_{ik'}$ 定义为

$$\left. \begin{aligned} q_{ik'} &= -g_{ik'} = -D_{ik'}/D \quad (k' = 1, 2, \dots; i = l+1, l+2, \dots, B), \\ q_{ik'} &= g_{ik'} = \begin{cases} 1, & \text{当 } k' = i \\ 0, & \text{当 } k' \neq i \end{cases} \quad (i = l+1, l+2, \dots, B; k' = l+1, l+2, \dots, B). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(10)可表成矩阵形式为

$$Qj = 0, \quad (12)$$

Q 是以式(11)中的 $q_{ik'}$ 为元素的 $(N-1) \times B$ 阶基本割集矩阵. 式(11)是一个可按行列式 D 和 $D_{ik'}$, 计算基本割集矩阵元素的新公式^[5].

4 基本割集矩阵元素的计算

设有如附图所示的网络线图, 选支路 1, 2, 3, 4 为链支, 5, 6, 7, 8 为树支, 且选①, ②, ③, ④为独立节点. 按式(2)写出关联矩阵 A 为

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{链支路} & \text{树支路} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{节点} \\ \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

D 等于 A 中右边方阵 A_T 的行列式为

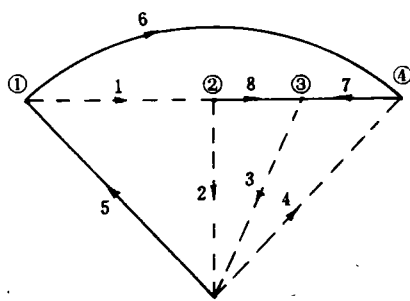
$$D = |A_T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

代入式(11)的第一式, 得

$$q_{ik'} = -D_{ik'}, (k' = 1, 2, 3, 4; i = 5, 6, 7, 8). \quad (13)$$

按式(6)中对 $D_{ik'}$ 的定义, 相当于现在用关联矩阵 A 中链支 k' 这一列元素的负值去代替行列式 D 中树支 i 这一列元素所得到的行列式. 例如对 $D_{51'}$, $D_{52'}$, $D_{53'}$ 和 $D_{54'}$ 来讲, 就是分别用关联矩阵 A 中对应于链支 1, 2, 3 和 4 的列元素的负值去取代行列式 D 中对应于树支 5 这一列元素后得到的行列式. 如

$$-q_{51'} = D_{51'} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$



附图 一个定向的具有四个独立节点和八条支路的平面图

$$-q_{52'} = D_{52'} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

等等. 再按式(11)的第 2 式有

$$q_{ik'} = \begin{cases} 1, & (k' = i) \\ 0, & (k' \neq i) \end{cases} \quad (k' = 5, 6, 7, 8; i = 5, 6, 7, 8). \quad (14)$$

合并式(13)和(14)的计算结果, 得式(12)中的基本割集矩阵为

$$Q = \begin{matrix} \text{基} \\ \text{本} \\ \text{割} \\ \text{集} \end{matrix} \begin{matrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{matrix} \begin{bmatrix} q_{51'} & q_{52'} & q_{53'} & q_{54'} & q_{55'} & q_{56'} & q_{57'} & q_{58'} \\ q_{61'} & q_{62'} & q_{63'} & q_{64'} & q_{65'} & q_{66'} & q_{67'} & q_{68'} \\ q_{71'} & q_{72'} & q_{73'} & q_{74'} & q_{75'} & q_{76'} & q_{77'} & q_{78'} \\ q_{81'} & q_{82'} & q_{83'} & q_{84'} & q_{85'} & q_{86'} & q_{87'} & q_{88'} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

可见, 无需选定基本割集组, 由公式(11)计算的结果清楚地表明: 由支路 2, 3, 4 和 5 组成了基本割集 C_5 ; 由支路 1, 2, 3, 4 和 6 组成了基本割集 C_6 ; 由支路 1, 2, 3 和 7 组成了基本割集 C_7 ; 以及由支路 1, 2 和 8 组成了基本割集 C_8 . 在以上四个割集中, 每一个都包含一条并不出现在其它割集中的树支路, 它们依次是 5, 6, 7 和 8 支路, 因而不论用何种方法都不能从其它割集中得到这个割集. 由于树支路数是 $N-1=5-1=4$, 所以基本割集数也是 $N-1=4$.

5 只需列写关联矩阵的割集电压法

有了基本割集矩阵式(15), 就可以按割集电压法求解各支路电压、电流了. 设附图中每支路都仅有 1 个电阻: $R_1=R_2=0.2 \Omega$, $R_3=0.25 \Omega$, $R_4=R_5=1.0 \Omega$, $R_6=0.17 \Omega$, $R_7=R_8=0.5 \Omega$, 并且支路 1 有恒定电压源 $E_s=2 \text{ V}$. 在此情况下, 复阻抗矩阵就是电阻矩阵

$$\hat{Z} = R \text{diag} \left[\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right],$$

复导纳矩阵为

$$\hat{Y} = \hat{Z}^{-1} = \text{diag} [5 \ 5 \ 4 \ 1 \ 1 \ 6 \ 2 \ 2], \quad (16)$$

而支路电动势列矩阵

$$\hat{E} = [2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (17)$$

由式(15)和(16), 求矩阵 Q 与 \hat{Y} 的乘积得

$$Q\hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -4 & 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

由此进一步求得

$$Q\hat{Y}\hat{E} = [0 \quad 10 \quad 10 \quad -10]^T \quad (18)$$

和

$$Q\hat{Y}\hat{Q}^T = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 9 & -5 \\ 10 & 21 & 14 & -10 \\ 9 & 14 & 16 & -10 \\ -5 & -10 & -10 & 12 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

按割集方程

$$Q\hat{Y}\hat{Q}^T\hat{V}' = Q\hat{Y}\hat{E},$$

式中 \hat{V}' 是 $N-1$ 阶基本割集复电压列矩阵. 把式(18)和(19)代入上式得

$$\begin{bmatrix} 11 & 10 & 9 & -5 \\ 10 & 21 & 14 & -10 \\ 9 & 14 & 16 & -10 \\ -5 & -10 & -10 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s' \\ V_e' \\ V_f' \\ V_g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix},$$

解此方程即可求出基本割集电压 V_s', V_e', V_f' 和 V_g' . 再应用 $\hat{V} = Q^T\hat{V}'$, 便从已求出的 V_s', V_e', V_f' 和 V_g' 求出各支路电压.

综上所述,当给定了网络结构和元件及参数值并选定了树支和链支后,只需列写容易写出的独立节点关联矩阵,根据公式(11)通过对行列式 D 和 D_{ik} 的计算就可以得到基本割集矩阵的各元素,从而就可以按适应性较强的割集电压法求解各支路电压和电流.

参 考 文 献

- 1 邱关源. 电网络分析. 北京:科学出版社,1988. 42~45
- 2 钟佐华,李灿宏. 网络图论和矩阵分析. 北京:人民邮电出版社,1988. 116~127, 389~408
- 3 陈荣年. 电网络基本方程的场论. 电子学报,1987,15(2):113~115
- 4 陈荣年,何煜光,陈洁. 网络现代场论. 北京:电子工业出版社,1991. 91~108, 133~146
- 5 陈荣年,王建成,陈强顺. 电网络矩阵分析法的场论. 华侨大学学报(自然科学版),1993,14(2):159~168

A New Formula for Calculating the Elements of Fundamental Cut-Set Matrix and Its Application

Chen Xinnian

(Dept. of Electron. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract For calculating the elements of fundamental cut-set matrix, a new formula is derived from the law of conservation of charge. Application of the formula to the method of cut-set voltage leads to the improvement of the method. We need only to write an easy incidence matrix instead of a fundamental cut-set matrix which is much more abstract.

Keywords cutsets, method of cutset voltage, incidence matrices, elements of fundamental cut-set matrix