第 15 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 15 No. 3
1994 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 1994

关于 B-样条曲线的非整体性*

郑 厚 生

(华侨大学精密机械工程系,泉州 362011)

摘要 对三次 B-样条基函数进行分析,给出三次 B-样条曲线非整体性的一些特点,以及在工程曲线设计中的具体应用.

关键词 B-样条,样条函数,特征多边形,曲线拟合

分类号 TH 126

B-样条曲线的主要优点是非整体性,即对曲线的局部修改不会影响曲线其它部分的形状,也不会改变整体曲线的基本性质.这个优点给设计者提供较大的灵活性.因此,B-样条曲线在工程曲线设计中得到广泛的应用.本文着重探讨较常用的三次均匀 B-样条曲线的非整体性的一些特点,及其在设计中的应用.

三次 B-样条曲线的方程为

$$\boldsymbol{B}_i(u) = N_3(u)\boldsymbol{P}_i + N_2(u)\boldsymbol{P}_{i+1} + N_1(u)\boldsymbol{P}_{i+2} + N_0(u)\boldsymbol{P}_{i+3},$$
$$0 \leqslant u \leqslant 1, i = 0,1,\cdots,n-3. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{P}_i$ 为给定特征多边形顶点的位置向量,$N_j(u)=a_ju^3+b_ju^2+c_ju+d_j(j=0,1,2,3)$ 为 u 的三次多项式,$\boldsymbol{B}_i(u)$ 为曲线上点的位置向量.方程(1)依次把四个顶点作为一组,得到一段曲线,把 $n-2$ 段曲线连接成一条整体 B-样条曲线.要求在连接点处有一,二阶连续导向量[1].

根据在连接点处有一,二阶连续导向量的条件,再假定 $N_3(u)+N_2(u)+N_1(u)+N_0(u)\equiv1$,则可求出 u 的三次多项式中的 $a_j,b_j,c_j,d_j(j=0,1,2,3)$ 的各具体系数值(附表).因此,方程(1)也可用如下矩阵给出.即

$$\boldsymbol{B}_i(u) = \frac{1}{6}[u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_i \\ \boldsymbol{P}_{i+1} \\ \boldsymbol{P}_{i+2} \\ \boldsymbol{P}_{i+3} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中 $0\leqslant u\leqslant1, i=0,1,\cdots,n-3$. 这样,在参数 u 从 0 变到 1 时,就得到一条三次 B-样条曲线(图 1).这条曲线由 $n-2$ 条曲线段光滑连接而成.在连接点处有一,二阶连续导向量.

1 三次 B-样条曲线的非整体性

1.1 给定四个顶点,将能唯一确定一分段三次 B-样条曲线的形状

当 $u=0$ 或 $u=1$ 时,曲线通过 $\boldsymbol{B}_i(0)$ 或 $\boldsymbol{B}_i(1)$,它们分别称为对应的一小段 B-样条曲线的

* 本文 1994-02-16 收到

附表　三次 B-样条曲线基函数及其一，二阶导数

$N_j(u)=a_ju^3+b_ju^2+c_ju+d_j \quad (j=0,1,2,3)$	$u=0$	$u=1$
$N_0(u)=\frac{1}{6}u^3$	0	$\frac{1}{6}$
$N_1(u)=-\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
$N_2(u)=\frac{1}{2}u^3-u^2+\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
$N_3(u)=-\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
$N_0(u)+N_1(u)+N_2(u)+N_3(u)$	1	1
$N_0'(u)=\frac{1}{2}u^2$	0	$\frac{1}{2}$
$N_1'(u)=-\frac{3}{2}u^2+u+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$N_2'(u)=\frac{3}{2}u^2-2u$	0	$-\frac{1}{2}$
$N_3'(u)=-\frac{1}{2}u^2+u-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$N_0'(u)+N_1'(u)+N_2'(u)+N_3'(u)$	0	0
$N_0''(u)=u$	0	1
$N_1''(u)=-3u+1$	1	-2
$N_2''(u)=3u-2$	-2	1
$N_3''(u)=-u+1$	1	0
$N_0''(u)+N_1''(u)+N_2''(u)+N_3''(u)$	0	0

始点和终点．计算表明，由三个相邻顶点 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{P}_{i+1},\boldsymbol{P}_{i+2}$ 形成一个三角形，$\boldsymbol{B}_i(0)$ 位于由顶点 $\boldsymbol{P}_{i+1}$ 向对边 P_iP_{i+2} 作中线的 $\frac{1}{3}$ 处．$\boldsymbol{B}_i(0)$ 点的切向量 $\boldsymbol{B}_i'(0)$，其方向平行于底边向量 $\overrightarrow{P_iP_{i+2}}$，其模为底边的一半；而二阶向量 $\boldsymbol{B}_i''(0)$ 的方向平行于中线向量 $\overrightarrow{P_{i+1}P_m}$，其模为中线的两倍．同样，可求出终点 $\boldsymbol{B}_i(1)$ 及其在该点处的切向量和二阶导向量．这是三次 B-样条曲线的重要几何性质．

因此，给定四个顶点 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{P}_{i+1},\boldsymbol{P}_{i+2},\boldsymbol{P}_{i+3}$，就完全确定一分段三次 B-样条曲线段，如图 2 所示．

1.2　移动一个顶点的位置，只影响该点前后各两段曲线的形状

给定一系列顶点，如果移动其中的一个顶点，比如把顶点 $\boldsymbol{P}_i$ 移动到 $\boldsymbol{P}_{i'}$ 位置，则根据上述几何作图可以看出，它只影响 $\boldsymbol{P}_i$ 点前后各两段曲线的形状．也就是说，它只波及到从 $\boldsymbol{P}_i$ 顶点算起前后各四个顶点范围内曲线形状．这就是修改一个顶点的位置所能控制的局部形状范围．当然，也可以同时修改几个顶点的位置，而用同样方法分析其局部形状改变的情况，见图 3.

1.3　用多重顶点和顶点共线方法，可满足设计特殊要求而不影响曲线基本特性

给定七个顶点 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4$，其中 $\boldsymbol{P}_2$ 为三重顶点．所形成的曲线为 $B_0B_1B_2B_3B_4$，其中 B_1B_2 和 B_2B_3 为两条直线段．出现尖点 $\boldsymbol{B}_2$，如图 4 所示．

根据三次 B-样条基函数，可以求出在尖点 B_2 处的一，二阶导向量

$$B_2' = N_3'(1)P_0 + N_2'(1)P_1 + N_1'(1)P_2 + N_0'(1)P_2 = 0,$$

$$B_2'' = N_3''(1)P_1 + N_2''(1)P_2 + N_1''(1)P_2 + N_0''(1)P_2 = 0.$$

也就是说，在尖点 B_2 处的一，二阶导向量均退化为 0. 因此，三次 B-样条曲线在该尖点处的一，二阶导向量是连续的．

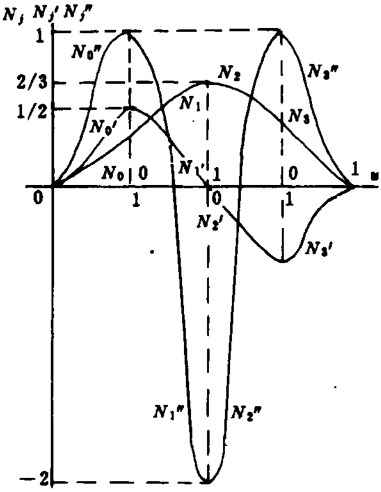

图 1　三次 B-样条基及其导数曲线

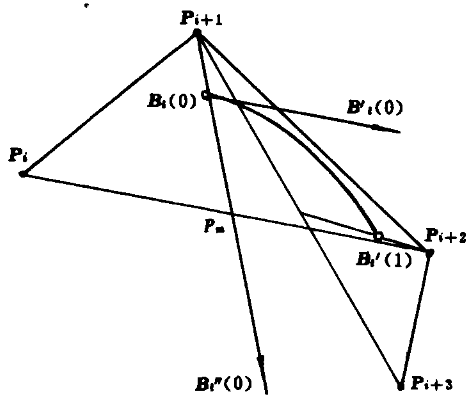

图 2　特征多边形与三次 B-样条曲线

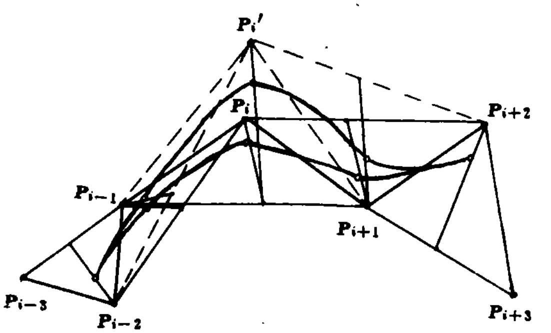

图 3　三次 B-样条曲线局部修改情况

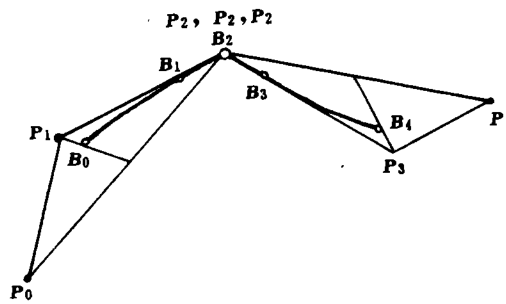

图 4　多重顶点控制三次 B-样条曲线的情况

可以运用二重顶点，使三次 B-样条曲线与特征多边形的某一个边相切；可采用三重顶点，设计出一个尖点；可用三个顶点共线，形成反向弧的切接；也可用四个顶点共线，使在三次 B-样条曲线中切接一直线段．这就给设计者提供了很大的设计灵活性．

1.4　对于特征多边形有更强的逼近性

三次 B-样条曲线比三次 B′ezier 曲线更逼近于特征多边形．这可以从两种曲线的基函数的比较看得出来．如果以四个顶点为例，则对三次 B′ezier 曲线，其首末两点的基函数值比中间两点的基函数值大得多．换句话说，基函数施加于首末两点的控制力比中间两点大得多．而三次 B-样条曲线则相反．因此，在用给定特征多边形来确定曲线时，三次 B-样条曲线具有

更好的逼近性，也更富有直观性．

1.5 可以拟合大挠度的曲线段

由于三次 B-样条曲线局部控制能力很强，具有优良的局部“可塑性”，因此它能解决一般样条所不能解决的拟合大挠度曲线段的困难．它可以拟合圆周，对圆进行“仿真”．设定一正多边形为给定的特征多边形．当正多边形的边数 n 不断增加时，三次 B-样条曲线拟合的“仿圆”与真圆的最大误差越来越小，直到趋近于 0．因此，可以利用三次 B-样条曲线，在曲线设计中，掮入一段圆周或其他大挠度的曲线段[2]．

2 结束语

综上所述，三次 B-样条曲线具有很强的局部造型能力，它更逼近于特征多边形．它在曲线设计中，可以产生一个尖点，形成反向弧切接，可以切入一条直线段，也可以掮接一段圆周或其它大挠度曲线段．在利用三次 B-样条曲线进行工程曲线设计中，可以得心应手地运用各种设计技巧，达到较完美的曲线造型要求．

参　考　文　献

1 许有信．计算机辅助设计与制造的几何基础．南京：江苏科学技术出版社，1989．137～151

2 福克斯 I D，普拉特 M J 著．设计与制造用的计算几何学．厉声林等译．北京：国防工业出版社，1986．96～109

On the Non-Integral Property of B-Spline Curve

Zheng Housheng

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ. 362011, Quanzhou)

Abstract Based on an analysis of the basic function of cubic B-spline, the author discusses the non-integral property of cubic B-spline; and its application to the design of curves in engineering.

Keywords B-splines, spline functions, characteristic polygon, curve fitting