

# 空间框架体系弹性稳定分析\*

欧 阳 煜

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

**摘要** 对结构进行空间整体分析, 并通过结构系统总势能二阶变分为零( $\delta^2\Pi=0$ )推导出结构屈曲方程. 文中采用目前求解特征值问题最有效、精度最好的反幂法来求解结构的临界荷载, 同时编制出应用于实际工程的计算程序.

**关键词** 弹性, 稳定分析, 特征值, 临界荷载, 空间框架结构

**分类号** TU 973. 251

目前高层建筑越来越高. 其相应的结构稳定问题已引起人们的重视. 目前常见的方法是把空间结构简化为平面结构, 利用结构平衡方程中刚度矩阵行列式值为零作为结构失稳的判定准则, 并由此计算出结构的临界荷载<sup>[1,2]</sup>. 这种方法虽简便实用, 但在理论上并不严密. 结构达到临界平衡状态时, 不但总势能一阶变分  $\delta\Pi=0$ , 更重要的特征是二阶变分  $\delta^2\Pi=0$ <sup>[3]</sup>. 要精确分析结构的稳定问题, 就应把结构的临界荷载和屈曲模态作为结构的内在属性, 通过二阶变分  $\delta^2\Pi=0$  进行精确分析.

## 1 空间单元稳定刚度

现有如图 1 所示的空间单元. 设  $u, v, \omega$  为单元在  $x, y, z$  方向上的位移, 则单元应变方程为

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\omega}{dx} \right)^2, \quad (1)$$

其中  $\frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\omega}{dx} \right)^2$  代表由  $y, z$  方向挠度引起的单元轴向应变, 即考虑了单元轴向力效应. 不过, 一般杆系有限元都忽略此二项. 单元应变能为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^l E \epsilon_x^2 dv = U_a + U_t, \quad (2)$$

其中  $U_a = \frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx$ , 为单元轴向变形产生的应变能;  $U_t$  为单元弯曲变形(即挠度)产生

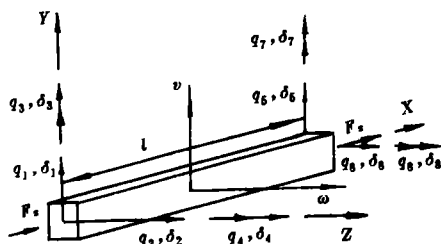


图 1 空间梁单元

\* 本文 1994-03-02 收到

的应变能. 其表达式为

$$U_1 = \frac{EI_z}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EI_z}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{F_x}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \frac{F_x}{2} \int_0^l \left( \frac{d\omega}{dx} \right)^2 dx, \quad (3)$$

它们是互相独立的, 并分别由  $u$  和  $v$ ,  $u$  和  $\omega$  的相互作用而产生. 因  $U_1$  是由单元屈曲前的轴向特性决定的, 故下面着重推导讨论弯曲变形能  $U_1$ .

选择屈曲时的位移函数为  $\begin{Bmatrix} v \\ \omega \end{Bmatrix} = N \delta^*$ ; 形函数为

$$N = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \\ = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 & 0 & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & -(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l & 0 \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 & 0 & (\xi^3 - \xi^2)l \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & -(\xi^3 - \xi^2)l & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

单元节点广义位移为  $\delta^* = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6 \ \delta_7 \ \delta_8]^T$ , 其中  $\xi = x/l$ . 将  $v, \omega$  的表达式代入式(4)即可得到单元应变能  $U_1$  的表达式. 外力对单元弯曲变形所做的功为  $W = \frac{1}{2} \delta^{*T} q^* = \frac{1}{2} \delta^{*T} K^* \delta^*$ , 因为结构屈曲时也是处在临界平衡状态<sup>[3]</sup>, 故  $W = U_1$ . 因此可得到单元刚度表达式为  $K^* = K_E^* + K_G^* \cdot K_E^*$  即为一般杆系有限元的空间梁单元刚度矩阵;  $K_G^*$  称为单元的几何刚度矩阵, 可反应单元轴向力  $F_x$  对刚度的影响. 表达式如下

$$K_G^* = F_x \cdot \begin{bmatrix} 1.2/l & 0 & 0 & 0 & -1.2/l & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1.2/l & -0.1 & 2l/15 & 0 & -1.2/l & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 2l/15 & 0 & 0 & 0 & -l/30 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 2l/15 & -0.1 & 0 & 0 & -l/30 \\ -1.2/l & 0 & 0 & -0.1 & 1.2/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2/l & 0.1 & 0 & 0 & 1.2/l & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & -l/30 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 2l/15 \\ 0.1 & 0 & 0 & -l/30 & -0.1 & 0 & 0 & 2l/15 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

将各单元刚度从局部坐标转化到整体坐标下, 然后组合为总刚度矩阵, 即  $K = K_E + K_G$ .

结构系统总势能为  $\Gamma_1 = \frac{1}{2} \Delta^T K_E \Delta + \frac{1}{2} \Delta^T K_G \Delta - \Delta^T q$ , 其中  $\Delta$  为总坐标系下的节点位移. 当系统即将屈曲而达到临界平衡状态时, 可得屈曲方程为

$$\delta^2 \Pi_1 = 0 \Rightarrow (K_E + K_G) \delta \Delta = 0, \quad (6)$$

在式(6)中,  $K_E$  可先求得. 但  $K_G$  中包含外荷载产生的轴力  $F_x$ , 而外荷载为待求的临界荷载, 故  $F_x$  是个未知数. 为了使计算能够进行, 可以按外荷载的大小比例取之为  $p^*$ , 求得  $K_G^*$ , 再令屈曲时  $p_{cr} = \lambda p^*$ , 可得  $K_G = \lambda K_G^*$ . 式(6)则可化为

$$(K_E + \lambda K_G^*) \delta \Delta = 0. \quad (7)$$

在图1所示的单元中,  $F_x$  以受拉为正, 现改为受压为正, 并令  $\Phi = \delta \Delta$ , 则式(7)化为  $(K_E - \lambda K_G^*) \Phi = 0$ . 至此, 我们可将结构稳定问题化为一个特征值问题, 特征向量  $\Phi$  为屈曲模态, 特征值  $\lambda$  中最小的一个  $\lambda$  乘以  $p^*$  即为临界荷载  $p_{cr} = \lambda p^*$ .

## 2 反幂法求临界荷载

在求解广义特征值问题方面,有许多方法可用.但在稳定问题中,我们最关心的是最小特征值及相应的特征向量.在这种情况下,反幂法最合适,它具有精度高、收敛速度快等优点.此法是目前最有效的求解特征值的方法之一<sup>[4]</sup>.

特征方程式(7)可化为  $K_G^* \Phi = \frac{1}{\lambda} K_E \Phi$ , 由于  $K_E$  是正定矩阵,故必有

$$\Rightarrow K_E^{-1} K_G^* \Phi = \frac{1}{\lambda} \Phi, \quad (8)$$

令  $\bar{\lambda} = 1/\lambda$ ,  $D = K_E^{-1} K_G^*$ , 则式(8)变为  $D\Phi = \bar{\lambda}\Phi$ .

这样,广义特征值问题就转化为一个标准特征值问题.取初始向量  $x^{(0)}$ , 则按以下公式迭代,得

$$\left. \begin{aligned} Y^{(R)} &= Dx^{(R-1)}, \\ x^{(R)} &= Y^{(R)} / \max(y^{(R)}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $\max(y^{(R)})$  为  $Y^{(R)}$  中的最大元素.当迭代次数  $R \rightarrow \infty$  时,可得  $\max(y^{(R)}) = \bar{\lambda}_1$ ,  $x^{(R)} = \Phi_1$ .

## 3 算例分析

例1 图2所示为一空间框架,  $E = 20750 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-2}$ ,  $G = 7900 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-2}$ , 各杆件截面积系数  $A = 3.38 \text{ cm}^2$ , 扭转惯性矩  $J = 0.20322 \text{ cm}^4$ , 两个方向主惯性矩均为  $I = 1.90152 \text{ cm}^4$ . 当  $N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = P$  时,  $P_{cr} = 29.35 \text{ kN}$ .

屈曲模态见图2. 节点5, 6, 7, 8在  $X, Z$  方向上的屈曲模态值为1, 这是完全对称空间刚架, 在对称外荷载作用下, 临界荷载值为重根. 达到临界状态时, 结构可能向  $X$  方向, 也可能向  $Z$  方向屈曲.

例2 福建炼油厂在设备安装过程中, 需要吊装一个目前国内最重的火炬塔, 高度达104 m, 重达2000 kN. 采用门架吊推法, 施工单位中国石化第二建设公司, 原在山东炼油厂为吊装一个火炬塔曾设计生产了一樑门架. 由于工期紧迫, 来不及重新加工生产这种门架, 故决定利用原有设备进行吊装. 门架如图3所示.

吊装过程中, 支座A, B可在轨道上缓慢滑动, 但无法始终保持同步. 可能发生一支座偏离平面外, 产生如图3虚线所示的出平面扭转失稳. 按通常平面刚架稳定算法对这类空间稳定问题将难以验算. 采用本文方法, 通过程序计算出门架在该失稳模态下的临界荷载为  $N_{cr} = 3920 \text{ kN}$ . 该值远大于门架在整个吊装过程中可能受到的最大荷载, 说明门架完全可以再次安全使用, 并于1992年6月12日正式吊装成功. 这不但保证了工程如期完成, 还为施工单位节约了不少资金.

## 4 结束语

上述算例及其在实际工程中的应用表明: 反幂法可对结构进行空间整体精确分析, 为结构设计提供一种经济、合理的实用分析方法; 它还可求得结构空间失稳的临界荷载及失稳时的屈曲模态, 为理论分析空间稳定问题提供了一种有效的方法. 采用该法编制的程序具有内存少、

精度高、计算速度快、使用很方便等优点。

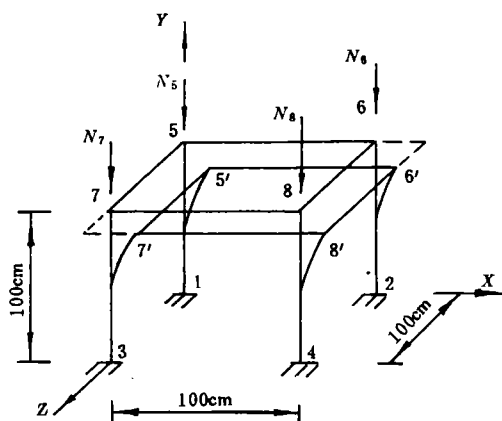
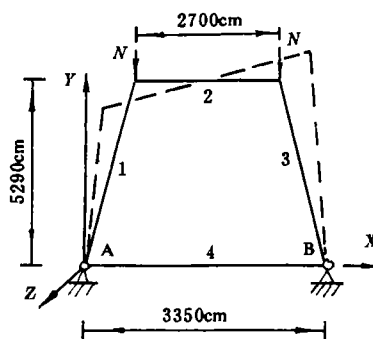


图 2 空间框架



各杆件尺寸如下: 杆①, ③为  $\varnothing 1120-10\text{mm}$ ;  
杆②为  $\varnothing 920-8\text{mm}$ ; 杆④为  $\varnothing 426-14\text{mm}$

图 3 门架示意图

## 参 考 文 献

- 1 丁洁民. 多高层刚架的弹塑性稳定. 同济大学学报, 1989, 17(2): 149~160
- 2 刘 滨. 高层筒体结构的整体稳定及二阶位移分析. 建筑结构学报, 1990, 1(1): 1~9
- 3 费志中. 弹性稳定. 北京: 煤炭工业出版社, 1989. 53~56
- 4 欧阳邕. 弹性·塑性·有限元. 湖南: 科学技术出版社, 1983. 465~471

## Elastic Stability Analysis of Space Frame Structures

Ouyang Yu

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** For analysing integrally the elastic stability of space frame structures, the author derives a structural buckling equation from second-order variation ( $\delta^2 \Pi = 0$ ) of the total potential of the structural system; and adopts inverse power method, the most effective and higher precision one at present in solving eigenvalue problem, to solve critical load of structures; and develops a general-purpose computer program which has found practical engineering application.

**Keywords** elasticity, stability analysis, characteristic values, critical load, space frame structure