第15卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.15 No.3
1994年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 1994

二指标鞅关于停点的停止定理*

陈 金 龙

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 介绍各种二指标鞅关于停点、强停点的停止定理,主要结果有弱鞅、强鞅关于停点、强停点的停止定理.

关键词 停点,强停点,强鞅,弱鞅,鞅

分类号 O 211.6

单指标的停时推广到多指标的停点,有很多性质不能保持,主要是由于 R_+ 是全序集而 R_+^2 是偏序集.在停时理论中,若 T_1,T_2 为停时,则 $T_1\wedge T_2,T_1\vee T_2$ 仍为停时;对二指标停点,$T_1\wedge T_2$ 则不一定为停点.因此,造成二指标的停点理论与单指标的停时理论有很多不同点.在单指标里,停时 T 满足 $\{T\geqslant z\}\in\mathscr{F}_z$,而在二指标里停点一般不满足 $\{T\geqslant z\}\in\mathscr{F}_z$.根据不同情况,可以分为两种不同停点:停点和强停点.它们的关系文[1]已作了论证,其中强停点的很多性质与单指标的停时很类似.由于二指标有弱鞅、鞅和强鞅三种不同形式,故相应的停止定理也有三种.对一般偏序鞅的停止定理,文[2]已作了详述,即它的形式与单指标完全一致.本文主要介绍弱鞅和强鞅形式的停止定理.在单指标中,鞅关于停时的停止仍为鞅;在二指标鞅中也有类似性质.此外,还将证明在强停点下,弱鞅和强鞅的停止仍为弱鞅和强鞅.

1 停点及其基本性质

先引进下面假设与记号.设 $z_1=(s_1,t_1)$, $z_2=(s_2,t_2)$, $z_1,z_2\in\overline{R}_+^2$,并规定"$\leqslant$"与"$\geqslant$"的关系:$z_1\leqslant z_2\Leftrightarrow s_1\leqslant s_2$, $t_1\leqslant t_2$; $z_1<z_2\Leftrightarrow s_1<s_2$, $t_1<t_2$; $z_1\wedge z_2=(\min(s_1,s_2),\min(t_1,t_2))$; $z_1\vee z_2=(\max(s_1,s_2),\max(t_1,t_2))$.设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一完备概率空间,$(\mathscr{F}_z)_{z\in R_+^2}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ-域族,它满足通常条件及$(\mathscr{F}_4)$条件.对 $z\in\overline{R}_+^2$ 来说,可令 $\mathscr{F}_z^1=\mathscr{F}_s^1=\bigvee_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_{st}$, $\mathscr{F}_z^2=\mathscr{F}_t^2=\bigvee_{s\geqslant 0}\mathscr{F}_{st}$, $\mathscr{F}_z^*=\mathscr{F}_z^1\vee\mathscr{F}_z^2$.

定义1 映射 $\Omega\to\overline{R}_+^2$ 称为停点,若对任意 $z\in\overline{R}_+^2$,有 $\{T\leqslant z\}\in\mathscr{F}_z$;若任意 $z\in\overline{R}_+^2$,有 $\{T\geqslant z\}\in\mathscr{F}_z$,则称 T 为强停点.由文[1]知,强停点必为停点.

定义2 设 T 为停点,$T=(T_1,T_2)$.定义:$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F},A\cap(T\leqslant z)\in\mathscr{F}_z,\ \forall\ z\in\overline{R}_+^2\}$;$\mathscr{F}_{T_i}^i=\{A\in\mathscr{F},A\cap(T_i\leqslant s)\in\mathscr{F}_s^i,\ \forall\ s\in\overline{R}_+\}$.

---

* 本文1993-10-19收到

命题1　$T:\Omega\to\overline{R}_+^2$，$T=(T_1,T_2)$，则 T 为停点须当且仅当 T_i 为 $(\mathscr{F}^i)$ 停时，且 T_i 关于 $\mathscr{F}^i_{T_i}$-可测 $(i=1,2)$.

命题2　映射 $T:\Omega\to\overline{R}_+^2$，$T$ 为停点须当且仅当 $[T]\in G$（即 T 的图为可选 σ-域）.

命题3　设 T 为停点，则 $\mathscr{F}^1_{T_1}\cap\mathscr{F}^2_{T_2}=\mathscr{F}_T$.

命题4　若 T_1,T_2 为停点，则 $T_1\vee T_2$ 为停点；若 T_1,T_2 为强停点，则 $T_1\wedge T_2$ 为强停点．
以上几个命题由定义即可推得．

命题5　若 S,T 为强停点，$S=(S_1,S_2)$，$T=(T_1,T_2)$，则 (S_1,T_2) 为强停点．

证　由于 S 为强停点，当且仅当 S 为停点，且 $S_1\in\mathscr{F}^2_0$，$S_2\in\mathscr{F}^1_0$. $\forall z\in\overline{R}_+^2$，有 $\{(S_1,T_2)\geqslant z\}=\{S_1\geqslant z_1\}\cap\{T_2\geqslant z_2\}$；由于 $\{S_1\geqslant z_1\}\in\mathscr{F}^1_{z_1}$，$\{T_2\geqslant z_2\}\in\mathscr{F}^1_0\subset\mathscr{F}^1_{z_1}$，故 $\{(S_1,T_2)\geqslant z\}\in\mathscr{F}^1_{z_1}$. 同理可证，$\{(S_1,T_2)\geqslant z\}\in\mathscr{F}^1_{z_2}$，所以 $\{(S_1,T_2)\geqslant z\}\in\mathscr{F}^1_{z_1}\cap\mathscr{F}^2_{z_2}=\mathscr{F}_z$.

命题6　设 $S=(S_1,S_2)$，$T=(T_1,T_2)$ 为停点，且 $S\wedge T$ 也为停点，则有 $\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

证　由于 $S\wedge T$ 为停点，且 $S\wedge T\leqslant S$，$S\wedge T\leqslant T$，故 $\mathscr{F}_{S\wedge T}\subset\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$. 反之，$\forall A\in\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$，则 $A\in\mathscr{F}^2_{S_2\wedge T_2}\cap\mathscr{F}^2_{T_2}=\mathscr{F}^2_{S_2\wedge T_2}$. 由命题1可得 $\{S_1\wedge T_1\leqslant z_1\}\in\mathscr{F}^2_{S_2\wedge T_2}$，$\forall z_1\in\overline{R}_+$，故 $\forall z\in\overline{R}_+^2$，$z=(z_1,z_2)$，$A\cap(S\wedge T\leqslant z)=A\cap(S_1\wedge T_1\leqslant z_1)\cap(S_2\wedge T_2\leqslant z_2)\in\mathscr{F}^2_{z_2}$.

同理可证，$A\cap(S\wedge T\leqslant z)\in\mathscr{F}^1_{z_1}$. 因此，$A\cap(S\wedge T\leqslant z)\in\mathscr{F}^1_{z_1}\cap\mathscr{F}^2_{z_2}=\mathscr{F}_z$，所以 $A\in\mathscr{F}_{S\wedge T}$，$\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_{S\wedge T}$. 命题成立．当 S,T 为强停点时，$S\wedge T$ 为停点，故有 $\mathscr{F}_{S\wedge T}=\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$.

2　鞅关于停点的停止定理

为研究鞅关于停点的停止定理，采用类似于单指标的方法，先研究离散情形，然后过渡到连续型．若 T 为取值于 $\overline{N}_+^2$ 的停点，则停点的定义等价于：$\{T=d\}\in\mathscr{F}_d$，$\forall d\in\overline{N}_+^2$；$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F},\ A\cap(T=d)\in\mathscr{F}_d,\ \forall\ d\in\overline{N}_+^2\}$.

引理1[2]　设 $(X_z)_{z\in R_+^2}$ 为 Q^{++} 连续的鞅，S,T 为停点，且 $S\leqslant T$，则 $\mathrm{E}[X_T|\mathscr{F}_S]=X_S$ (a.s).

推论　若 $(X_z)_{z\in R_+^2}$ 为 Q^{++}-连续鞅，S,T 为强停点，且 $S=(S_1,S_2)$，$T=(T_1,T_2)$，$S\leqslant T$，则有 $\mathrm{E}[X_{S_1T_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$ (a.s). $\mathrm{E}[X_{T_1S_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$ (a.s).

引理2　设 $(X_z)_{z\in N_+^2}$ 鞅，$S=(S_1,T_2)$，$T=(T_1,T_2)$ 为取值于 $\overline{N}_+^2$ 上的停点，且 $S\leqslant T$，则有 $\mathrm{E}[X_{S_1T_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$ (a.s)，$\mathrm{E}[X_{T_1S_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$ (a.s).

证　$\forall A\in\mathscr{F}_S$，$\mathrm{E}[I_AX_{S_1T_2}]=\sum\limits_d\mathrm{E}[I_AX_{S_1T_2}I_{(S_1=d)}]=\sum\limits_d\mathrm{E}[I_{A\cap(S_1=d)}X_{dT_2}]$.

由于 S 为 $(\mathscr{F}_z)$ 停点，故 S_1 为 $(\mathscr{F})$ 停时，且 $(S_1=d)\in\mathscr{F}^2_{S_2}$，所以 $A\cap(S_1=d)\in\mathscr{F}^2_{S_2}$. 对固定 d，$(X_{ds},\mathscr{F}^2_S,\ S\in\overline{N}_+)$ 为鞅，由 Doob 停止定理得 $\mathrm{E}[X\,dT_2|\mathscr{F}^2_{s_2}]=X\,ds_2$，故 $\mathrm{E}[I_AX_{S_1T_2}]=\sum\limits_d\mathrm{E}[I_{A\cap(S_1=d)}X_{dT_2}]=\sum\limits_d\mathrm{E}[I_{A\cap(S_1=d)}X_{dS_2}]=\mathrm{E}[I_AX_S]$. 即得 $\mathrm{E}[X_{S_1T_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$ (a,s).

同理可证，$\mathrm{E}[X_{T_1S_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$ (a,s). 引理2比引理1更进一步，因为在引理2中 (S_1,T_2)，(T_1,S_2) 不一定为停点．

定理1　设 $(X_z)_{z\in N_+^2}$ 为 $(\mathscr{F}_z)_{z\in N_+^2}$ 鞅，$S\leqslant T$ 为定义在 $\overline{N}_+^2$ 上的停点，则有 $\mathrm{E}[X(]S,T])|\mathscr{F}_S]=0$．

证 由于，$X(]S,T])=X_S-X_{S_1T_2}-X_{T_1S_2}+X_T$，故 $\mathrm{E}[X(]S,T])|\mathscr{F}_S]=\mathrm{E}[X_S-X_{S_1T_2}-X_{T_1S_2}+X_T|\mathscr{F}_S]=X_S-X_S-X_S+X_S=0$

下面把定理1推广到连续参数情形．由上面证明可知，只要引理2对连续参数成立即可．

引理3 设$(X_z,\mathscr{F}_z,z\in\overline{R}^2_+)$为有界鞅，$S=(S_1,S_2)$，$T=(T_1,T_2)$为停点，且$S\leqslant T$，则$\mathrm{E}[X_{S_1T_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$，$\mathrm{E}[X_{T_1S_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$．

证 这里只证第一个式子．令

$$S_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I[\frac{k-1}{2^n}\leqslant S_i<\frac{k}{2^n}]+(\infty)I\{S_i=\infty\},$$

$$T_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^n}I[\frac{k-1}{2^n}\leqslant T_i<\frac{k}{2^n}]+(\infty)I\{T_i=\infty\},$$

则 $S_i(n)$，$T_i(n)$ 为$(\mathscr{F}^i)$停时，易证：$T^{(n)}=(T_1^{(n)},T_2^{(n)})$，$S^{(n)}=(S_1^{(n)},S_2^{(n)})$为停点，且 $T_n^{(n)}\downarrow T$，$S_n^{(n)}\downarrow S$，$S^{(n)}\leqslant T^{(n)}$．

对一切自然数n，令$D_n=\{(\frac{k}{2^n},\frac{l}{2^n})$，$k,l=0,1,\cdots,\infty\}$，则$(X_z)_{z\in D_n}$为$(\mathscr{F}_z)_{z\in D_n}$鞅．由引理2知 $E[X_{S_1^{(n)}T_2^{(n)}}|\mathscr{F}_{S^{(n)}}]=X_{s^{(n)}}$，即 $\forall A\in\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_{S^{(n)}}$．从而有

$$\int_A X_{S_1^{(n)}T_2^{(n)}}\,\mathrm{d}p=\int_A X_{S^{(n)}}\,\mathrm{d}p. \tag{1}$$

由X右连续性得 $\lim\limits_{n\to\infty}X_{S_1^{(n)}T_2^{(n)}}=X_{S_1T_2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}X_{S^{(n)}}=X_S$．由$X$有界，利用控制收敛定理，让式(1)中$n\to\infty$，则得$\int_A X_{S_1T_2}\mathrm{d}p=\int_A X_S\mathrm{d}p$，即 $\mathrm{E}[X_{S_1T_2}|\mathscr{F}_S]=X_S$．

定理2 设$(X_z,\mathscr{F}_z,z\in\overline{R}^2_+)$是$Q^{++}$连续的$L\log^+L$有界鞅，$S=(S_1,S_2)$，$T=(T_1,T_2)$为停点，且$S\leqslant T$，则有 $\mathrm{E}[X(]S,T])|\mathscr{F}_S]=0$．

下面讨论弱鞅和强鞅的停止定理，先证明一个引理．

引理4 设M是Q^{++}连续的1—鞅，T_1,S_1是$(\mathscr{F}^1)$停时，且$S_1\leqslant T_1$，S_2是$\mathscr{F}^1_{S_1}$可测随机变量，则有 $\mathrm{E}[M_{T_1S_2}|\mathscr{F}^1_{S_1}]=M_{S_1S_2}$．

证 先设S_2是离散的，$\forall A\in\mathscr{F}^1_{S_1}$，因$[S_2=l]\in\mathscr{F}^1_{S_1}$，故 $A\cap\{S_2=l\}\in\mathscr{F}^1_{S_1}$．由单指标Doob停止定理，得$\int_A M_{T_1S_2}\mathrm{d}p=\sum\limits_l\int_{A\cap(S_2=l)}M_{T_1l}\mathrm{d}p=\sum\limits_l\int_{A\cap(S_2=l)}M_{S_1l}=\int_A M_{S_1S_2}\mathrm{d}p$．故$S_2$离散时，有 $\mathrm{E}[X_{T_1S_2}|\mathscr{F}^1_{S_1}]=M_{S_1S_2}$．由于$M$是$Q^{++}$—连续的，利用引理3的方法即可得到所证明的结论．

定理3 设$(X_z)_{z\in\overline{R}^2_+}$是$L\log^+L$有界弱鞅，$S=(S_1,S_2)$为停点，$T=(T_1,T_2)$为强停点，且$S\leqslant T$，则有 $\mathrm{E}[X(]S,T])|\mathscr{F}_S]=0$．

证 由于X为弱鞅，故$X=M+N$：其中，M为1-鞅，N为2-鞅．所以，$\mathrm{E}[X(]S,T])|\mathscr{F}_S]=\mathrm{E}[M(]S,T])|F_S]+\mathrm{E}[\mathrm{N}(]\mathrm{S},\mathrm{T}])|\mathscr{F}_S]$．由文[3]得 $\mathrm{E}[M(]S,T])|\mathscr{F}_S]=\mathrm{E}[M(]S,T])|\mathscr{F}^1_{S_1}|\mathscr{F}^2_{S_2}]$，$M(]S,T])=M_S-M_{S_1T_2}-M_{T_1S_2}+M_T$．由于$M_S$为$\mathscr{F}^1_{S_1}$—可测，$T_2\in\mathscr{F}^1_0\subset\mathscr{F}^1_{S_1}$，故 $M_{S_1T_2}\in\mathscr{F}^1_{S_1}$．则由引理4，有 $\mathrm{E}[M(]S,T])|\mathscr{F}^1_{S_1}]=\mathrm{E}[M_S-M_{S_1T_2}-M_{T_1S_2}+M_T|\mathscr{F}^1_{S_1}]=M_S-M_{S_1T_2}-\mathrm{E}[M_{T_1S_2}|\mathscr{F}^1_{S_1}]+\mathrm{E}[M_T|\mathscr{F}'_{S_1}]=M_S-M_{S_1T_2}-M_S+M_{S_1T_2}=0$．

因此得 $\mathrm{E}[M(]S,T])|\mathscr{F}^1_{S_1}|\mathscr{F}^2_{S_2}]=\mathrm{E}[M(]S,T])|\mathscr{F}_S]=0$．同理可证 $\mathrm{E}[N(]S,T])|\mathscr{F}_S]=0$．因此，本定理成立．

定理4 设 $(X_z)_{z\in R_+^2}$ 为 $(\mathscr{F}_z)_{z\in R_+^2}$ 的 $L\log L^+$ 有界强鞅，且 $(\mathscr{F}_z)$ 满足 $(\mathscr{F}_5)$ 条件，$S=(S_1,S_2)$ 为停点，$T=(T_1,T_2)$ 为强停点，且 $S\leqslant T$；则有 $E[M(]S,T])|\mathscr{F}_S^*]=0$.

证 由定理3证明过程知，$E[X(]S,T])|\mathscr{F}_{S_1}^1]=0$，$E[X(]S,T])|\mathscr{F}_{S_2}^2]=0$. 由 $(\mathscr{F}_5)$ 条件成立，可推知：$\mathscr{F}_{S_1}^1$ 与 $\mathscr{F}_{S_2}^2$ 局部可比较．故 $E[X(]S,T])|\mathscr{F}_S^*]=E[X(]S,T])|\mathscr{F}_{S_1}^1\vee\mathscr{F}_{S_2}^2]$ $=E[X(]S,T])|\mathscr{F}_{S_1}^1]+E[X(]S,T])|\mathscr{F}_{S_2}^2]-E[X(]S,T])|\mathscr{F}_S]=0$.

定理5 设 $(X_z)_{z\in R_+^2}$ 是 Q^{++}－连续有界弱鞅，T 为强停点，则 $(X_z)_{z\in R_+^2}$ 关于 T 的停止 $(X_z^T)_{z\in R_+^2}$ 仍为弱鞅(这里，$X_z^T=X_{T\wedge z}$).

证 利用引理4，采用类似于定理3的方法易证 $\forall\ z_1,z_2\in\overline{R}_+^2(z_1\leqslant z_2)$，则有 $E[X^T(]z_1,z_2])|\mathscr{F}_{z_1}]=0$.

定理6 设 $(X_z)_{z\in R_+^2}$ 是 $L\log L^+$ 有界强鞅，且满足 $(\mathscr{F}_5)$ 条件，则 $(X_z^T)_{z\in R_+^2}$ 为 $(\mathscr{F}_z)$ 强鞅. 其中 T 为强停点.

证 类似于定理4. 令 $T=(T_1,T_2)$，$z_1=(s_1,t_1)\leqslant z_2=(s_2,t_2)$，则 $X^T(]z_1,z_2])=X_{s_1t_1}^T-X_{s_1t_2}^T-X_{s_2t_1}^T+X_{s_2t_2}^T=X_{s_1\wedge T_1,t_1\wedge T_2}-X_{s_1\wedge T_1,t_2\wedge T_2}-X_{s_2\wedge T_1,t_1\wedge T_2}+X_{s_2\wedge T_1,t_2\wedge T_2}$. 由于 T 为强停点，故 $T_2\in\mathscr{F}_0^1\subset\mathscr{F}_s^1$，所以 $T_2\wedge t_1\in\mathscr{F}_{s_1}^1$. 由此得 $X_{s_1\wedge T_1,t_1\wedge T_2}\in\mathscr{F}_{s_1}^1$，$X_{s_1\wedge T_1,t_2\wedge T_2}\in\mathscr{F}_{s_1}^1$. 由引理4，得 $E[X_{s_2\wedge T_1,t_1\wedge T_2}|\mathscr{F}_{s_1}^1]=E[X_{s_2\wedge T_2,t_1\wedge T_2}|\mathscr{F}_{t_1}^1|\mathscr{F}_{s_1}^1]=E[X_{s_2\wedge T_1,t_1\wedge T_2}|\mathscr{F}_{s_1\wedge t_1}^1]=X_{s_1\wedge T_1,t_1\wedge T_2}=X_{s_1t_1}^T=X_{z_1}^T$. 即 $E[X_{s_2t_1}^T|\mathscr{F}_{s_1}^1]=X_{z_1}^T$. 同理可证，$E[X_{s_2t_2}^T|\mathscr{F}_{s_1}^1]=X_{s_1t_2}^T$. 因此，$E[X^T(]z_1,z_2])|\mathscr{F}_{z_1}^1]=0$；同理，$E[X^T(]z_1,z_2])|\mathscr{F}_{z_1}^2]=0$. 由 $(\mathscr{F}_5)$ 条件，可得 $E[X^T(]z_1,z_2])|\mathscr{F}_{z_1}^*]=0$，即 (X_z^T) 为强鞅.

参考文献

1 陈培德．多指标随机过程引论．陕西：陕西师范大学出版社，1989. 10～35

2 Kuktz T G. The optional sampling theorem for martinglas indexed directed set. Ann. Pro., 1980, 8(4): 45～65

3 Meger P A. Theorem elerentare de process deux indiex. T.N.M., 1981, (863): 1～39

Stopping Theorem of Two-Martingales on Stopping Point

Chen Jinlong

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The author presents a stopping theorem of two-martingales on stopping point and strong stopping point. The principal results include stopping theorem of weak martingale and strong martingale on stopping point and strong stopping point.

Keywords stopping point, strong stopping point, strong martingale, weak martingale, martingales