第15卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.15 No.3
1994年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 1994

单位圆盘保持边界点不动的拟共形映射的分解*

吴 泽 民

(华侨大学管理信息科学系,泉州 362011)

摘要 引进新的方法,全面地改进了单位圆盘保持边界点不动的拟共形映射的分解的界限.

关键词 拟共形映射,分解,界限

分类号 O 174.55

1 记号与结果

用 Q 表示单位圆盘 U 到自身的拟共形映射全体所成的类. 对于 $g\in Q$,把 Q 中与 g 有相同边界值的 f 全体所成的类记作 Q_g. Q_I 即为 Q_z. 设 $\mu_f(z)=f_{\bar z}/f_z$, $k(f)=\|\mu_f\|_\infty=\operatorname{esssup}|\mu_f(z)|$, $K(f)=(1+k(f))/(1-k(f))$, $\mathscr{F}=\{\mu_f\mid f\in Q_I\}$.

Reich 在文〔1〕中证明了如下两个定理:

定理A 存在定义在 $1\leqslant K<\infty$ 上的界限 $\Phi(K)$ 满足下列条件:(Ⅰ)$\Phi(K)$ 在 $1\leqslant K<\infty$ 上连续,$\Phi(1)=1$;(Ⅱ)$\Phi(K)=K$, $1<K<\infty$;(Ⅲ)对任何 $f\in Q_I$, $K(f)=K$,存在 $f_i\in Q_I$,使得 $f=f_2\circ f_1$, $K(f_i)\leqslant\Phi(K)$, $i=1,2$.

定理B 若 $K(f)<(3+\sqrt{5})/2$,则定理A的断言对 $\Phi(K)=K\sqrt{K}-K+1$, $1\leqslant K<(3+\sqrt{5})/2$ 成立.

文〔2〕把定理B改进成

定理C 定理A的断言对

$$\Phi(K)=\begin{cases}K+(K\sqrt{K}-3K+\sqrt{K}+1)/(\sqrt{K}+1), & 1\leqslant K\leqslant 2+\sqrt{5},\\ K-4\sqrt{K}(\sqrt{K}-1)/(\sqrt{K}+1)^3, & 2+\sqrt{5}<K<\infty\end{cases}$$

成立.

赖万才指出:定理C中的界限可加强到当 $K\geqslant 3.38297\cdots$ 时,定理A对

$$\Phi(K)=K-(K-1)/(K+\sqrt{K}+1) \tag{1}$$

成立.

本文通过引入参数,全面地改进了上述各个界限,得到如下的定理:

* 本文1993-12-02收到;国家自然科学基金和福建省自然科学基金资助项目.

定理 1　定理 A 的断言对

$$\Phi(K)=\begin{cases}\Phi_1(K)=K-\dfrac{(K-1)(-K^2+2K\sqrt{K}+6\sqrt{K}+1)}{(K+1)(K+6\sqrt{K}+1)}, 1\leqslant K\leqslant K_0\\ \Phi_2(K)=K-(\sqrt{K}-1)(K\sqrt{K}+1)/(K^2+1), K_0<K<\infty\end{cases}$$

成立，其中 $K_0=2.69264\cdots$ 为方程 $\Phi_1(K)=\Phi_2(K)$ 适合 $K>1$ 的解.

2　一些引理

设 $\mathscr{B}(U)=\{\varphi|\varphi$ 在 U 中解析, $\|\varphi\|<\infty\}$，其中 $\|\varphi\|=\iint\limits_U|\varphi(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

引理 1[3]　设 $\mu\in\mathscr{F}$，则对任意的 $\varphi\in\mathscr{B}(U)$，有

$$\left|\iint\limits_U\frac{\mu\varphi}{1-|\mu|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint\limits_U\frac{|\mu|^2|\varphi|}{1-|\mu|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引理 2[4]　设 $g(z)\in Q$，以 $\mu(z)$ 为复特征，若 $G(z)$ 是 Q_g 中的一个极值映照，$k^*=k(G)$，则有

$$k^*/(1-k^*)\leqslant I[\mu]+\Delta[\mu],$$

其中

$$I[\mu]=\sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{B}(U)\\ \|\varphi\|\leqslant 1}}\left|\iint\limits_U\frac{\mu\varphi}{1-|\mu|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|,$$

$$\Delta[\mu]=\sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{B}(U)\\ \|\varphi\|\leqslant 1}}\iint\limits_U\frac{|\mu|^2|\varphi|}{1-|\mu|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引理 3　设

$$p(x)=\frac{[k(1-tk^2)/(1-k^2)(1-t^2k^2)]-[\sqrt{x}(1-tx)/(1-x)(1-t^2x)]}{k/(1-k^2)-\sqrt{x}/(1-x)},$$

$$0\leqslant x\leqslant k^2,\tag{2}$$

其中 $1/2\leqslant t<1, 0\leqslant k<1$，则 $p(0)\geqslant p(x)\geqslant p(k^2)$.

证　利用洛必达法则，经计算可得

$$\lim_{x\to k^2}p(x)=(1-tk^2)/(1-t^2k^2)-2tk^2(1-t)(1-k^2)/(1+k^2)(1-t^2k^2)^2$$

$$\equiv p(k^2),\tag{3}$$

故 $p(x)$ 在点 $x=k^2$ 左连续.

以下证明 $p'(x)\leqslant 0$. 为简化计算，把式(2)中的 $p(x)$ 形式地记为 $p(x)=(A-B(x))/(C-D(x))$，从而有

$$p'(x)=\{-B'(x)[C-D(x)]+D'(x)[A-B(x)]\}/[C-D(x)]^2.$$

只需证明 $\tilde{p}(x)=D'(A-B)-B'(C-D)\leqslant 0$. 但 $[\log B(x)]'=B'/B=(1+x)/2x(1-x)-t(1-t)/(1-tx)(1-t^2x)\equiv\tilde{B}(x)$，从而 $B'=B\tilde{B}$. 再把 $D'(x)=(1+x)/2\sqrt{x}(1-x)^2$ 代入 $\tilde{B}(x)$ 的表达式，经过简单的计算可得

$$\tilde{p}(x)=\frac{t(1-t)\sqrt{x}(k-\sqrt{x})}{(1-k^2)(1-t^2x)(1-x)^2}\left[\frac{1+k\sqrt{x}}{1-t^2x}-\frac{k(1+x)(k+\sqrt{x})}{2x(1-t^2k^2)}\right].$$

故 $\widetilde{p}(x)\leqslant 0$ 等价于

$$(1+k\sqrt{x})/(1-t^2x)-k(1+x)(k+\sqrt{x})/2x(1-t^2k^2)\leqslant 0.$$

令 $\sqrt{x}=y, 0\leqslant y\leqslant k$，上式又等价于

$$f(y)\equiv -kt^2y^5-k^2t^2y^4+k(2t^2k^2-t^2-1)y^3+(t^2k^2+k^2-2)y^2+ky+k^2\geqslant 0.$$

显然

$$f''(y)=-20kt^2y^3-12k^2t^2y^2+6k(2t^2k^2-t^2-1)y+2(t^2k^2+k^2-2),$$

$$f'''(y)=-60t^2ky^2-24k^2t^2y+6k(2t^2k^2-t^2-1)<0.$$

又 $f''(0)=2(t^2k^2+k^2-2)<0$，故 $f''(y)<0$. 由此可知，$f(y)$ 是上凸函数，从而 $\min f(y)=\min(f(0),f(k))$. 但 $f(0)=k^2, f(k)=0$，故知 $f(y)\geqslant 0$ 恒成立．引理 3 得证．

3 定理 1 的证明

设 $f\in Q_I$，f 的复特征为 $\mu(z)$，$k=k(f)$，$K=K(f)$. 令

$$\mu_1(z)=(1-t)\mu(z)/(1-t|\mu(z)|^2),\quad t=(K+1)/(\sqrt{K}+1)^2. \tag{4}$$

若 $g_1(z)\in Q$，以 $\mu_1(z)$ 为复特征，则

$$k(g_1)=(1-t)k/(1-tk^2),\ K(g_1)=(1+k(g_1))/(1-k(g_1))=\sqrt{K}.$$

取 $g_2=f\circ g_1^{-1}$，$g_2(z)$ 的复特征为 $\mu_2(z)$，就有

$$\mu_2(g_1(z))=t\mu(z)g_{1z}/\overline{g}_{1\bar{z}},k(g_2)=tk,K(g_2)=\sqrt{K}.$$

因此有分解为

$$f=g_2\circ g_1,K(g_i)=\sqrt{K},\quad i=1,2.$$

上述分解未必有 $g_i\in Q_I, i=1,2$，但可作如下修正：

设 $G(z)$ 是 Q_{g_1} 中的一个极值映照，记 $k^*=k(G)$，$K^*=K(G)$. 定义 $f_1=G^{-1}\circ g_1$，$f_2=g_2\circ G$. 显然有

$$f=f_2\circ f_1,f_i\in Q_I,K(f_i)\leqslant\sqrt{K}K^*,\ i=1,2.$$

下面来估计 K^*. 由式(4)得

$$\iint\limits_U\frac{\mu_1\varphi}{1-|\mu_1|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-t)\iint\limits_U\frac{\mu(1-t|\mu|^2)\varphi}{(1-|\mu|^2)(1-t^2|\mu|^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

把右边的被积函数除 φ 后写成

$$s\mu/(1-|\mu|^2)+\mu[1-t|\mu|^2-s(1-t^2|\mu|^2)]/(1-|\mu|^2)(1-t^2|\mu|^2),$$

其中 s 是一个仅与 k 有关的常数．记

$$A(x)=1-tx-s(1-t^2x),0\leqslant x\leqslant k^2,$$

$$h(x)=\sqrt{x}\,|A(x)|/(1-x)(1-t^2x),0\leqslant x\leqslant k^2.$$

由引理 1 可得

$$\left|\iint\limits_U\frac{\mu_1\varphi}{1-|\mu_1|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant|s|(1-t)\left|\iint\limits_U\frac{|\mu^2||\varphi|}{1-|\mu|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$+(1-t)\iint\limits_U h(|\mu|^2)|\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5}$$

在 $0\leqslant s\leqslant\frac{1}{t}$ 下分 $A(k^2)\geqslant 0$ 和 $A(k^2)<0$ 两种情形来讨论.

(1) $A(k^2)\geqslant 0$ 的情形．此时有 $A(x)\geqslant 0$，它等价于

$$s\leqslant(1-tx)/(1-t^2x)\equiv E(x),\quad 0\leqslant x\leqslant k^2. \tag{6}$$

在式(6)的条件下，$h(x)\leqslant h(k^2)$ 等价于 $s\leqslant p(x)$. 但 $E'(x)<0$，故 $E(x)\geqslant E(k^2)=p(0)$. 联合引理 3 即知当

$$0\leqslant s\leqslant p(k^2) \tag{7}$$

时，有 $h(x)\leqslant h(k^2)$. 从而由式(5)得

$$\left|\iint\limits_U \frac{\mu_1\varphi}{1-|\mu_1|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{k(1-t)(1-t^2k^2)}{(1-k^2)(1-t^2k^2)}-\frac{sk(1-t)}{1+k}\equiv M(k),$$

因此，$I[\mu_1]\leqslant M(k)$. 另一方面

$$\iint\limits_U \frac{|\mu_1|^2|\varphi|}{1-|\mu_1|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_U\frac{(1-t^2)|\mu|^2|\varphi|}{(1-|\mu|^2)(1-t^2|\mu|^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{(1-t^2)k^2}{(1-k^2)(1-t^2k^2)}\equiv N(k),$$

故有 $\Delta[\mu_1]\leqslant N(k)$. 由引理 2 得

$$K^*=1+2k^*/(1-k^*)\leqslant 1+2[M(k)+N(k)],$$

从而

$$K(f_i)\leqslant\sqrt{K}K^*\leqslant\sqrt{K}+2\sqrt{K}[M(k)+N(k)],\quad i=1,2. \tag{8}$$

由式(4)及

$$k=(K-1)/(K+1) \tag{9}$$

即可算得 $M(k)+N(k)=(\sqrt{K}-1)/2-s(\sqrt{K}-1)/\sqrt{K}(\sqrt{K}+1)$. 再把它代入式(8)，知

$$K(f_i)\leqslant K-2s(\sqrt{K}-1)/(\sqrt{K}+1),\quad i=1,2. \tag{10}$$

显然，为了得到 $K(f_i)$ 的较好估计，应选取尽可能大的 s 的值，由条件(7)知应取 $s=p(k^2)$. 而由式(3)，(4)和(9)可算得

$$p(k^2)=(K\sqrt{K}+1)(\sqrt{K}+1)/2(K^2+1).$$

把上式代入(10)就有

$$K(f_i)\leqslant K-(\sqrt{K}-1)(K\sqrt{K}+1)/(K^2+1)\equiv\Phi_2(K),\ i=1,2.$$

顺便指出，当取 $s=1-t=2\sqrt{K}/(\sqrt{K}+1)^2$ 时，由式(10)即可得到定理 C 中 $\Phi(K)$ 的第二部分．而取 $s=1/(1+t)=(\sqrt{K}+1)^2/2(K+\sqrt{K}+1)$，就可得到式(1)的界限．

(2) $A(k^2)<0$ 的情形．要 $h(x)\leqslant h(k^2)$ 只需 $|A(x)|\leqslant -A(k^2)$，而 $A(0)\leqslant -A(k^2)$ 等价于

$$s\geqslant E\left(\frac{k^2}{2}\right)=\frac{2-tk^2}{2-t^2k^2}. \tag{11}$$

在式(11)的条件下

$$I[\mu_1]\leqslant sk(1-t)/(1-k)-k(1-t)(1-tk^2)/(1-k^2)(1-t^2k^2),$$

而 $\Delta[\mu_1]$ 仍有上界 $N(k)$. 再由式(4)和(9)可得

$$I[\mu_1]+\Delta[\mu_1]\leqslant s\sqrt{K}(\sqrt{K}-1)/(\sqrt{K}+1)-(K-1)/2\sqrt{K}(\sqrt{K}+1),$$

从而

$$K(f_i)\leqslant 1+2s(K\sqrt{K}-K)/(\sqrt{K}+1),\quad i=1,2. \tag{12}$$

的衣片模型都是凹多边形,已有的算法不大适用.我们可用如下方法来求解任意两个多边形的相交多边形.

2.2.1 *分析点的类型* 作为结果多边形中的顶点有3种不同类型:(1)点a是P_1的顶点,同时也在P_2中;(2)点b是P_2的顶点,同时也在P_1中.(3)点c是P_1中的一条边形P_2中的一条边的交点.其它一些点是一个多边形的顶点但不在另一个多边形中,它们不属于任何相交部分:点d是P_1的顶点但不在P_2中;点e是P_2的顶点但不在P_1中.

在图3所示的例子中的顶点具有如下类型:a类点:1,4,8,9;b类点:18,21;c类点:2,3,5,7,10,13;d类点:6,11,12;e类点:14,15,16,17,19,20.

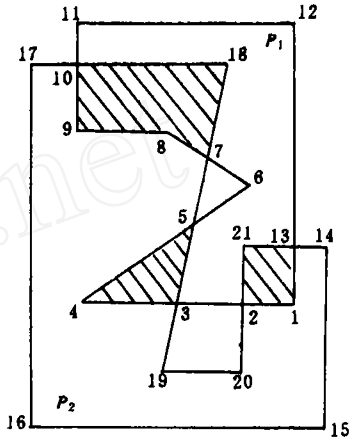

图3 两个多边形的交集

2.2.2 *标识点相对于多边形的位置* 为了将这些点分类,需要标识出点(x_0,y_0)是在多边形P的内部还是外部(多边形边界上的点认为在其内部).这个问题在文[1]中已经清楚地说明并解决了.

2.2.3 *形成数据结构* 在分出点类型a,b,c后,整个问题就可以变成将这些点按一致的方法进行排序,以建立多边形P_1和P_2交集的数据结构.

2.2.4 *计算相交多边形面积* 当所有结果多边形的数据结构已建立在计算机主存时,可用下面公式计算含有n个顶点((x_i,y_i))的相交多边形面积,即

$$0.5*\mathrm{abs}(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i-1}-x_i)*(y_{i-1}+y_i))$$
$$=0.5*\mathrm{abs}(\sum_{i=0}^{n-1}x_i*(y_{i-1}-y_{i+1}).$$

当然,在算法设计和实现时还有许多细节需要考虑和处理,这里就不再深入讨论了.

参考文献

1 罗杰斯 D F 著.计算机图形学的算法基础.梁友栋等译.北京:科学出版社,1987.73~101

2 Mangen A,Lasudry N. Search for the intersection polygon of any two polygons:application to the garment industry. Computer Graphics Forum,1991,(10):195~208

Material Layout in Dress CAD

Zhang Quanhuo　Fang Ronghui　Fan Huilin

(Dept. of Computer Science,Huaqiao Univ.,362011,Quanzhou)

Abstract With respect to the layout of polygonal dress materials in computer-aided design of dress,the authors set forth its basic idea;and gives the algorithm which can be implemented by C language;and put forward the key to realize automatic layout of dress material and main steps to design the algorithm.

Keywords computer aided design,garments,layout of dress material,algorithms,polygons