第 15 卷 第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 15 No. 3
1994 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 1994

Gamma 部件参数 λ 和 k 的 Bayes 估计*

陈 建 伟

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 讨论部件寿命服从 Gamma 分布，并在形状参数 k 和尺度参数 λ 都未知的情况下，分别给出参数 k 和 λ 在平方损失函数下的 Bayes 估计．得到参数 k 的先验分布为离散分布，λ 的先验分布分别为指数 Beta 和 Gamma 分布下的 Bayes 估计公式．

关键词 贝叶斯估计，γ 分布，先验分布，形状参数 k，尺度参数 λ

分类号 O 213

文〔1〕,〔2〕对部件寿命服从 $\Gamma(t,\lambda,k)$ 分布，并在形状参数 k 为已知，尺度参数 λ 为未知的情况下，分别讨论了部件可靠性在平方损失下的 Bayes 估计．文〔3〕讨论在非平方损失函数下当 k 已知时，参数 λ 和部件可靠性的 Bayes 估计．

本文讨论部件寿命服从 Gamma 分布，并在形状参数 k 和尺度参数 λ 都未知的情况下，研究了参数 k 的先验分布为离散分布，λ 的先验分布分别为指数 Beta 和 Gamma 分布下的 Bayes 估计；给出部件各项可靠性指标的 Bayes 估计，从而推广了文〔1〕,〔2〕和〔3〕的结果．

首先，设部件的寿命 x 服从 $\Gamma(t,\lambda,k)=\lambda^k\cdot(t^{k-1}e^{-\lambda t})/\Gamma(k)$，其中 $t>0$，形状参数 k 和尺度参数 λ 都未知．部件的可靠度函数和平均寿命分别为

$$R(t)=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\int_t^\infty x^{k-1}e^{-\lambda x}dx,\ T=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}\int_0^\infty dt\int_t^\infty x^{k-1}e^{-\lambda x}dx. \tag{1}$$

特别当 k 为正整数时，$R(t)=\sum\limits_{i=1}^{k-1}e^{-\lambda t}(\lambda t)^i/i!$，$T=k/\lambda$．

现假设投入 n 个部件进行完全寿命测试，并记各个部件的失效时刻依次为 $t_1,\cdots,t_n$. 则 $(t_1,\cdots,t_n)$ 关于 λ,k 的条件概率分布为 $f(t_1,\cdots,t_n|\lambda,k)=\prod\limits_{i=1}^n\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}t_i^{k-1}e^{\lambda t_2}\frac{\lambda^{nk}}{[\Gamma(k)]^n}e^{-\lambda T_0}\prod\limits_{i=1}^n t_i^{k-1}$. 其中 $T_0=\sum\limits_{i=1}^n t_i$，为测试总时间．设形状参数 k 的先验分布为离散分布：$P(k=k_i)=p_i(i=\overline{1,m})$，$\sum\limits_{i=1}^m p_i=1$；尺度参数 λ 的先验分布为 $\pi(\lambda)$. 则 (k,λ) 的联合后验密度为

$$f(k_j,\lambda|t_1,\cdots,t_n)=\frac{f(t_1,\cdots,t_n|\lambda,k_j)\pi(\lambda)p_j}{\sum\limits_{j=1}^m\int_0^\infty f(t_1,\cdots,t_n|\lambda,k_j)\pi(\lambda)p_jd\lambda}$$

* 本文 1993-12-17 收到；福建省自然科学基金资助项目

$$=\frac{p_j\lambda^{nk_j}e^{-\lambda T_0}\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\pi(\lambda)/[\Gamma(k_j)]^n}{\sum_{j=1}^{m}[p_j(\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1})\int_0^\infty\lambda^{nk_j}e^{-\lambda T_0}\pi(\lambda)d\lambda/[\Gamma(k_j)]^n]},\ j=1,2,\cdots,m. \tag{2}$$

下面根据参数λ具有不同的先验分布,分别讨论k和λ的 Bayes 估计.

定理1 设λ具有先验指数 Beta 分布,即$\pi(\lambda)=e^{-\alpha\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}/B(\alpha,\beta)$,其中,$\lambda>0$,$\alpha>0$,$\beta$为正整数.则在二次损失下$k$和$\lambda$的 Bayes 估计为

$$\hat{k}=\sum_{j=1}^{m}k_jP(k=k_j|t_1,\cdots,t_n)=\frac{\sum_{j=1}^{m}[k_jp_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/[\Gamma(k_j)]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j^2\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/[\Gamma(k_j)]^n]},$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j+1}\Gamma(nk_j+2)/[\Gamma(k_j)]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/[\Gamma(k_j)]^n]},$$

其中$C_{nk+i}=\sum_{l=0}^{\beta-1}(-1)^lC_{\beta-1}^l/(T_0+\alpha+l)^{nk+1+i}$,$(i=0,1)$.

证 由式(2)得

$$f(k_j,\lambda|t_1,\cdots,t_n)=\frac{p_j\lambda^{nk_j}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}/[\Gamma(k_j)]^n}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\int_0^\infty\lambda^{nk_j}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}/[\Gamma(k_j)]^n]}, \tag{3}$$

于是可得

$$P(k=k_j|t_1,\cdots,t_n)=\frac{p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\int_0^\infty\lambda^{nk_j}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda/[\Gamma(k_j)]^n}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\int_0^\infty\lambda^{nk_j}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda/[\Gamma(k_j)]^n]},\ (j=\overline{1,m}).$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\lambda^{nk_j}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda\\&=\sum_{l=0}^{\beta-1}(-1)^l\binom{\beta-1}{l}\int_0^\infty\lambda^{nk_j}e^{-(\alpha+T_0+l)\lambda}d\lambda\\&=\frac{\Gamma(nk_j+1)\sum_{l=0}^{\beta-1}(-1)^l\binom{\beta-1}{l}}{(T_0+\alpha+l)^{nk_j+1}}\triangleq\Gamma(nk_j+1)C_{nk_j},\ (j=\overline{1,m}).\end{aligned} \tag{4}$$

故得

$$P(k=k_j|t_1,\cdots,t_n)=\frac{p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/[\Gamma(k_j)]^n}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/[\Gamma(k_j)]^n]},\ (j=\overline{1,m}).$$

于是由 Bayes 定理可知k的 Bayes 估计为

$$\hat{k}=E(k|t_1,\cdots,t_n)=\sum_{j=1}^{m}k_jP(k=k_j|t_1,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[k_jp_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/(\Gamma(k_j))^n\right]}{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/(\Gamma(k_j))^n\right]}.$$

由式(3)，(4)得

$$f(\lambda|t_1,\cdots,t_n)=\sum_{j=1}^{m}f(\lambda,k_j|t_1,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\lambda^{nk_j}\mathrm{e}^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^{\beta-1}\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}/(\Gamma(k_j))^n\right]}{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/(\Gamma(k_j))^n\right]},$$

于是由 Bayes 定理可得 λ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}=\mathrm{E}(\lambda|t_1,\cdots,t_n)=\int_0^{\infty}\lambda f(\lambda|t_1,\cdots,t_n)\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_i\prod\limits_{j=1}^{n}t_i^{k_j-1}\int_0^{\infty}\lambda^{nk_j+1}\mathrm{e}^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^{\beta-1}\mathrm{d}\lambda/(\Gamma(k_j))^n\right]}{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/(\Gamma(k_j))^n\right]}.$$

又由于

$$\int_0^{\infty}\lambda^{nk_j+1}\mathrm{e}^{-(\alpha+T_0)\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda})^{\beta-1}\mathrm{d}\lambda=\Gamma(nk_j+\alpha)\sum_{l=0}^{\beta-1}(-1)^l\binom{\beta-1}{l}/(T_0+\alpha+l)^{nk_j+2}$$

$$\triangleq\Gamma(nk_j+2)C_{nk_j+1},$$

即得

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j+1}\Gamma(nk_j+2)/(\Gamma(k_j))^n\right]}{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}C_{nk_j}\Gamma(nk_j+1)/(\Gamma(k_j))^n\right]}.$$

定理得证．

由定理 1 可得下列推论．

推论 1　若当 $\alpha=1$，$\beta=1$ 时，$\pi(\lambda)=\mathrm{e}^{-\lambda}$，即 $\mathrm{e}^{-\lambda}$的先验分布为均匀分布 U(0,1)；则 k，λ 的 Bayes 估计为

$$\hat{k}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[k_jp_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j+1)/((T_0+1)^{k_j}\Gamma(k_j))^n\right]}{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j^2\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j+1)/((1+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j))^n\right]},$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j+2)/((1+T_0)^{nk_j+1}\Gamma^n(k_j))\right]}{\sum\limits_{j=1}^{m}\left[p_j\prod\limits_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j+1)/((1+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j))^n\right]}.$$

推论 2　若形状参数 k 已知，即 $P(k=k_1)=1$，则 k，λ 的 Bayes 估计为

$$\hat{k}=k_1,\ \hat{\lambda}=(nk_1+1)\frac{\sum\limits_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta-1}{j}/(T_0+\alpha+j)^{nk_1+2}}{\sum\limits_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta-1}{j}/(T_0+\alpha+j)^{nk_1+1}}.$$

这正是文〔3〕的推论 2．

定理 2 设 λ 具有先验 Gamma 分布，即 $\pi(\lambda)=\dfrac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\lambda^{\beta-1}e^{-\alpha\lambda}(\lambda>0)$，则在二次损失下，$k$ 和 λ 的 Bayes 估计分别为

$$\hat{k}=\frac{\sum_{j=1}^{m}[k_jp_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/[(\alpha+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j)]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/[(\alpha+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j)]^n]},$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j+1)/[(\alpha+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j)]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/[(\alpha+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j)]^n]}\cdot\frac{1}{\alpha+T_0}.$$

证 由式(2)得

$$f(k_j,\lambda|t_1,\cdots,t_n)=\frac{p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\lambda^{nk_j+\beta-1}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}/[\Gamma(k_j)]^n}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\int_0^\infty\lambda^{nk_j+\beta-1}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}d\lambda/[\Gamma(k_j)]^n]}$$

$$=\frac{p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\lambda^{nk_j+\beta-1}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}/[\Gamma(k_j)]^n}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/(\alpha+T_0)^{nk_j+\beta}[\Gamma(k_j)]^n]},\quad(j=\overline{1,m}).$$

利用 Bayes 定理可得 k 的 Bayes 估计为

$$\hat{k}=E(k|t_1,\cdots,t_n)=\sum_{j=1}^{m}k_jp(k=k_j|t_1,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m}[k_jp_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/[(\alpha+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j)]^n]}{\sum_{i=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/[(\alpha+T_0)^{k_j}\Gamma(k_j)]^n]}.$$

再由式(2)得

$$f(\lambda|t_1,\cdots,t_n)=\sum_{j=1}^{m}f(\lambda,k_j|t_1,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\lambda^{nk_j+\beta-1}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}/[\Gamma(k_j)]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/\Gamma(k_j)^n(\alpha+T_0)^{nk_j+\beta}]}.$$

由 Bayse 定理得 λ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}=E(\lambda|t_1,\cdots,t_n)=\int_0^\infty\lambda f(\lambda|t_1,\cdots,t_n)d\lambda$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\int_0^\infty\lambda^{nk_j+\beta}e^{-(\alpha+T_0)\lambda}d\lambda/[\Gamma(k_j)]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/\Gamma(k_j)^n(\alpha+T_0)^{nk_j+\beta}]}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j+1)/(\alpha+T_0)^{\beta+nk_j+1}(\Gamma(k_j))^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/\Gamma(k_j)^n(\alpha+T_0)^{nk_j+\beta}]}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j+1)/(\Gamma(k_j)(\alpha+T_0)^{k_j})^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(\beta+nk_j)/(\Gamma(k_j)(\alpha+T_0)^{k_j})^n]}\cdot\frac{1}{\alpha+T_0}.$$

由定理2直接得到下列推论．

推论3　当$\alpha=0$，$\beta=0$时，$\pi(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$，$\lambda>0$，即$\pi(\lambda)$是先验无信息分布，则在二次损失下，$k$，$\lambda$的Bayes估计分别为

$$\hat{k}=\frac{\sum_{j=1}^{m}[k_jp_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j)/[(T_0^{k_j}\Gamma(k_j))]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j)/[(T_0^{k_j}\Gamma(k_j))]^n]},$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j+1)/[(T_0^{k_j}\Gamma(k_j))]^n]}{\sum_{j=1}^{m}[p_j\prod_{i=1}^{n}t_i^{k_j-1}\Gamma(nk_j)/[(T_0^{k_j}\Gamma(k_j))]^n]T_0}.$$

推论4　若形状参数k为已知，即$P(k=k_1)=1$，则在二次损失下，k和λ的Bayes估计分别为$\hat{k}=k_1$，$\hat{\lambda}=(\beta+nk_1)/(\alpha+T_0)$．这正是文[3]的推论4．

应用定理1,2的结论，可得部件的可靠度和平均寿命的估计分别为

$$\hat{R}(t)=\frac{\hat{\lambda}^{\hat{k}}}{\Gamma(\hat{k})}\int_t^{\infty}x^{\hat{k}-1}e^{-\hat{\lambda}x}dx\,,\qquad \hat{T}=\frac{\hat{\lambda}^{\hat{k}}}{\Gamma(\hat{k})}\int_0^{\infty}dt\int_t^{\infty}x^{\hat{k}-1}e^{-\hat{\lambda}x}dx\,.$$

参考文献

1　Lwin T, Singh N. Bayesian analysis of the gamma distribution model in reliability. Engneering IEEE Transaction on Reliability, 1974, (R-23): 314～319

2　吴绍敏．Gamma部件可靠性的Bayes估计．华侨大学学报(自然科学版)，1988，9(3)：1～6

3　陈建伟．非平方损失函数下Gamma部件可靠性的Bayes估计．运筹学杂志，1991，10(1)：62～64

Bayes Estimations of Parameters λ, k for Gamma Units

Chen Jianwei

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　The author deals with the unit of which the life follows gamma distribution and the parameters λ, k are unknown. Bayesian estimations are given respectively to the shape parameter k and the scale parameter λ under quadratic loss function. A formula of Bayesian estimate under such a priori distribution, i.e., a priori distribution of parameter k being discrete distribution and that of λ being exponential Beta distribution and Gamma distribution, is obtained.

Keywords　Bayes estimations, gamma distributions, priori distributions, shape parameter k, scale parameter λ