第15卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.15 No.2
1994年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr.1994

基于分支矩阵的计算机生成树*

范慧琳 张全伙

(华侨大学计算机科学系,泉州 362011)

摘要 介绍分支矩阵概念及应用它随机生成树的图象的基本思想,给出用 Turbo Pascal 实现含有分支矩阵的随机生成树的算法,最后对这一方法进行简要的讨论.

关键词 树,分支矩阵,算法,计算机图象

分类号 TP 391.41

在过去几年中,树和植物的计算机图象的综合生成已成为许多文章研讨的主题.树的计算机模拟朝着两个主要的途径发展:虚构树的逼真图象生成;使用抽象的物理和生物学上的模式,模拟其物理形式和特性.现在,已导出各种模型以便对不同种类的树进行描述,诸如地貌学中河流排泄系统的模拟,各种稀有树种的植物分析,人类或狗的支气管树的生理研究等等.在实际应用方面,生成虚构树的逼真图象广泛应用于航空模拟器中,它能使驾驶员信服自己是在实地地形上空飞行.城市规划者把树加入到计算机生成的发展提案中,能更清楚地展现出发展后的环境.到目前为止,研究者们已形成了多种较为成熟的树的计算机图象的模型,比较典型的有粒子系统、碎片模型、嫁接和 L-系统等,并提出了许多算法.在这些方法中,树的生成一般分为两个层次,即先生成二叉或三叉拓扑树作为1棵树的基础,然后把较为完善的几何模型加到拓扑树上,生成几何树.最终的树形实际上隐含在树的整个生长变化过程中,它是树的生长模式的结果.本文介绍的方法是基于 Horton 和 Strahler 提出的分支矩阵及其阶和双阶等概念,允许规定某些数值参数对树形进行某些度量,对树的基本形态(如棘刺状、稠密状,细长状等)进行数值估计.本方法不同于其它方法之处,在于树的形态与其生长过程是分离的,因此能更好地控制树的最终形态.这种方法首先选择一个分支矩阵,然后随机生成拓扑树.该拓扑树的分支矩阵能恰好或极类似于所选择的分支矩阵.通常,给定一个分支矩阵,可得到多种形态不同的树.反之,对于当前得到的某一树形,其拓扑结构所对应的分支矩阵一定与给定的分支矩阵相符合.最后,通过用阶和双阶的线性、多项式(或指数规律),控制分支的宽度、长度和分支结点的角度,并在二维空间作图,从而得到满足要求的几何树.

1 基本概念

在讨论分支矩阵前,先给出几个与之相关的基本概念.

* 本文 1993-11-07 收到

定义 1 　对于 1 棵二叉树，其结点可通过下列的递归过程加以标记．叶结点标记为 1，如果 1 个结合 v 的两个儿子标记为 i 和 j，那么结点 v 的标记

$$\mathrm{ord}(v)=\begin{cases}\max(i,j), & \text{当 } i\neq j \text{ 时},\\ i+1, & \text{当 } i=j \text{ 时}.\end{cases}$$

连接结点 v 及其儿子 y 的边 e 的标记，$\mathrm{ord}(e)=\mathrm{ord}(y)$．一个结点(或边)的标记称为该结点(或边)的阶．从根结点增加一条额外的边，并称其为根边．根边的阶(也是根的阶)称为树的 Strahler 数．如图 1 所示，二叉树上所标的数字为相应结点(或边)的阶．Strahler 数 $S=3$．另把二叉树中的叶子称为端结点，其余结点称为分支结点．

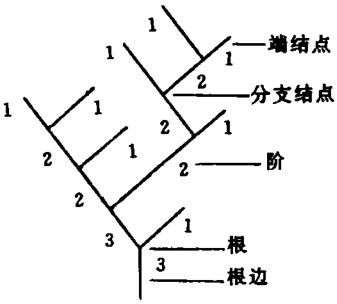

图 1　二叉树的阶和 Strahler 数

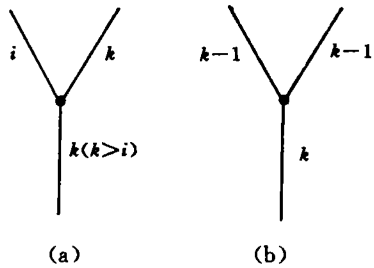

图 2　双阶

定义 2 　二叉树中阶为 k 的分支结点带两个儿子，阶分别为 i 和 j，则该点的双阶是一个数对

$$(m,n)=\begin{cases}(k,i), & \text{当 } j=k \text{ 且 } i<k \text{ 时},\\ (k-1,k-1), & \text{当 } i=j=k-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

图 2(a)表示 1 个带有双阶(k,i)的 k 阶分支结点，(b)则表示 1 个带有双阶$(k-1,k-1)$的 k 阶分支结点．有了阶和双阶的概念后，即可定义下列数值量：

(1)当 $k\geqslant 2$，令 a_k 是阶为 k 的分支结点数；(2)当 $1\leqslant i\leqslant k$，$b_{k,i}$是双阶(k,i)的结点数；(3)当 $k\geqslant 2$，$b_{k,k}$是双阶$(k-1,k-1)$的结点数；(4)当 $\mathrm{i}\leqslant j\leqslant k$，$P_{k,j}=b_{k,j}/a_k$ 是阶为 k 的分支结点，含有双阶(k,j)的概率．

定义 3 　带有 Strahler 数 S 的二叉树 T 的分支矩阵 $\mathrm{ram}(T)$，是如下形式的一个$(S-1)\times S$ 的随机矩阵

$$\mathrm{ram}(T)=\begin{bmatrix}P_{2,1} & P_{2,2} & O & O & \cdots & O\\ P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} & O & \cdots & O\\ \vdots & & & & & \\ P_{s,1} & P_{s,2} & P_{s,3} & P_{s,4} & P_{s,5} & \end{bmatrix}.$$

若令 $P_{1,1}=1$，该分支矩阵是一方形的下三角随机矩阵．如图 1 所示的二叉树的分支矩阵则是

$$\mathrm{ram}(T)=\begin{pmatrix}3/5 & 2/5 & \\ 1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

由此可见，分支矩阵的每一元素均确切地体现了二叉树的“形态”的有关信息．

2　随机生成树的算法

本算法沿用了 Georges Eyrolles 等人，关于分枝模型的组合分析和树的计算机成象的若干基本思想．给定 1 个 $(S-1)\times S$ 的随机三角矩阵 $\boldsymbol{R}$. 首先，随机地生成一棵含有 Strahler 数 S 的拓扑二叉树 T. 在此基础上，再根据边的长、宽和分支结点的角度的选择规律而形成几何树．最后，在靠近末端的枝干附上叶子，达到良好的直观效果．该算法用 TURBO PASCAL 完成，程序的总体结构如图 3.

2.1　拓扑树的生成

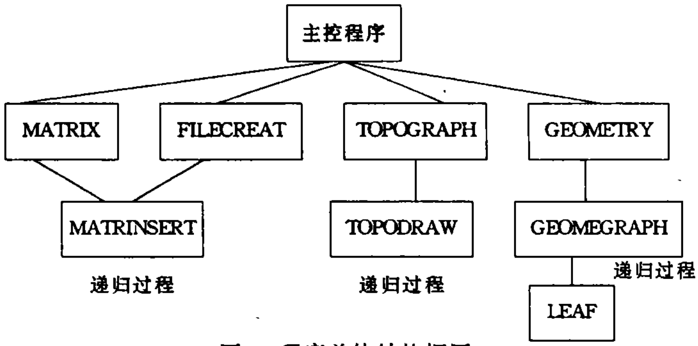

图3　程序总体结构框图

拓扑树的生成由 MATRIX，FILECREAT 和 MATRINSERT 三个过程完成．其中，MATRIX 和 FILECREAT 是根据分支矩阵生成拓扑树的初始化过程，给定的分支矩阵可从键盘即时输入（MATRIX）或事先建立数据文件（FILECREAT），视其规模大小而定．MATRINSERT 是使用分支矩阵生成拓扑树的递归过程，被 MATEIX 或 FILECREAT 所调用．

```
PROCEDURE MATRINSERT (…);
VAR …
BEGIN
 IF 非端结点 THEN
   BEGIN
   产生左右孩子指针域；
   IF RANDOM < 某一值
   随机选择分支矩阵第 k 行的(k,i)；
   (k,i)的个数减 1；
   IF 结点的双阶为(k-1,k-1)
     THEN 其分支结点左、右指针域同值
     ELSE IF 此结点为其父的左儿子
       THEN 标号 k 赋给此结点的左儿子
                              /左边为主边/
       ELSE 标号赋给此结点的右儿子
                              /右边为主边/
                                         ⋮
   MATRINSERT(左子树)；
                                         ⋮
   MATRINSERT(右子树)；
                                         ⋮
   END；
END；
```

对二叉树的每个结点采用二叉链表的存贮结构，每个结点包含 3 个域：阶和左、右指针域，左右指针分别指向此结点的左右孩子．接着，通过引用 TOPODRAW 和 TOPODRAW 两个过程，便可描绘出生成的拓扑结构．其中，TOPOGRAPH 是初始化过程，它拟定分支的间隔和高度值，确定根边的坐标并给出根边．TOPODRAW 是被 TOPOGRAPH 所调用的递归过程，它利用 TURBO PASCAL 的绘图功能，从根边开始，逐层确定坐标，递归描绘每一个分支的左右子枝，直到相应结点的阶为 1 时为止．

由上可见，拓扑树的生成是从树 T_1 开始，它还原成标为 S 的单一边（它的根边）．如此反复构造出一系列作上标记的 Tn．选择一条标为 $k\neq 1$ 的 Tn 的端边，并把这条边分成两条标有 K 和 $i(i<k)$ 或两条标为 $k-1$ 的边，由此得到 T_{n+1}，按照矩阵 R 的第 k 行给定的双阶分布概率随机选择 (k,i) 或 $(k-1,k-1)$，直到所有的端边都被标为 1 时为止．在遇到双阶 (k,i) 且 $i<k$ 的情形时，还需明确地描述哪一边（左或右儿子）接受标号 k（该边将被称为主边）．其方法有多种，例如．主边在左右儿子之间交替出现；主边选为最靠近垂直方向的边等等．以上过程中的选择方法是：当此结点是其父结点的左儿子时，则标号 k 给此结点的左儿子；反之，若此结点是其父结点的右儿子，则标号 k 赋给此结点的右儿子，由此得出的树形呈伞状．实验表明，最终得到的树 T 的分支矩阵接近于给定的矩阵 R，树的大小可通过选择 Strahler 数 S 控制．

2.2　几何树的生成

几何树的生成由 GEOMETRY 和 GERMEGRAPH 完成．其中，GEOMETRY 是生成几何树的初始化过程，给出了参数 C_1，C_2 和 α 值，拟定近根主干的长宽，确定顶点坐标并绘出近根主干．GEOMEGRAPH 是几何树的递归生成过程，这个过程被 GEOMETRY 所调用．当结点的阶不为 1 时，首先用 $L(k)$，$W(k)$ 计算长度和宽度．然后，如果结点的双阶为 $(k-1,k-1)$，则置 $\theta_1=\theta_2=\theta_f$；否则根据 θ_m，θ_s 分别进行计算．最后依次确定左、右分支四个顶点坐标，计算结点连接处坐标，着色，调用叶子生成过程 LEAF 等．生成几何树的主要思想，是把拓扑树的每一边用 1 个矩形框代替并考虑其宽度 $W(e)$ 和长度 $L(e)$，对每一分支结点 v 还需考虑与其母支的两个偏差角度 $\theta_1(v)$ 和 $\theta_2(v)$，如图 4 所示．边的宽度和长度仅依赖于该边的阶 k，

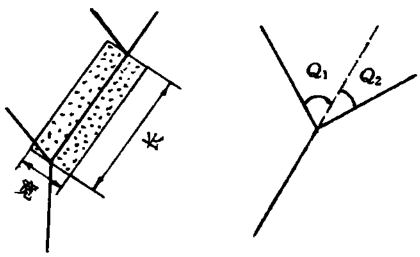

图 4　枝干的长宽和分支角度

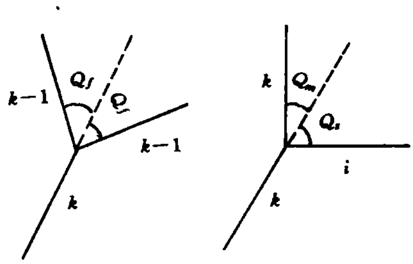

图 5　分支角度的选择

与分支结点相关的两个角度 θ_1 和 θ_2 仅依赖于该结点的双阶．

考虑到自然现象，当树从根往端结点生长时，分支的宽度不断减小，分支的长度基本相同或稍减．因此，把长度和宽规律度选作阶 k 的非减函数 $l(k)=C_1\cdot k$，且 $W(k)=C_2\cdot k^{\alpha}$，其中 C_1，C_2 和 α 是数值参数．$\alpha=S$ 或 $S/2$（S 为 Strahler 数）时，直观效果效好．主分支相对其母支的偏差角度，一般小于其它的次要分支，而分支的主次是由它的阶来度量的，如图 5 所示．对带有双阶 (k,i)，$i<k$ 的分支结点，其母支的主分支（阶为 k）和次分支（阶为 i）的偏差角度 θ_m 和 θ_s、由 $\theta_m(k,i)=C_m*i/(k-1)$ 和 $\theta_s(k,i)=Cs*(k-i)/(k-1)$ 给定，其中 C_m 和 C_s 是数值参数，程序中取 $C_s=\pi/16$，$C_m=\pi/6$．对带有双阶 $(k-1,k-1)$ 的分支结点，则是一个叉，二个分支的重要程度相同，故置 $\theta_1=\theta_2=\theta_f$，程序中取 $\theta_f=\pi/6$．对应于分支结点的长方形之间的连线，组织成一个四边形（图略），单独计算其顶点坐标并填色．

2.3　叶子的绘制

叶子生成由过程 LEAF 实现．这个过程被 GEOMEGRAPH 所调用．当分支的阶≤Strahler 数 S/2 时,首先在左分支和右分支上部加上一定密度的叶子．叶子着生点坐标及枝干的角度是随机确定的．然后,如果左或右分支的阶为 1,则在该分支的顶端加叶子．

叶子的模型可简化成菱形,且一边生成几何树枝一边在枝上附着叶子,通过在相对于枝干的不同角度、不同位置附上一定密度的叶子,便能达到较好的直观效果．叶子在树枝上的设置规律取决于分支的阶:对于小阶分支,用较大浓度随机地安排叶子,高阶分枝则不画叶．在程序中,对阶≤S/2 的分支,便置上叶子．

3 结束语

文中所述的方法是以拓扑为基础,允许对分支结构进行分析且与其生成历程无关．导出的分支矩阵表达了分支结构形式的主要特征,它对树的最终形态控制力强,在各种领域(植物学、艺术、建筑学……)的交互环境中,简易、快速使其具有实用价值．虽然这种方法脱离了植物学的模式．但通过加入叶子,绘图算法同样可获得逼真的图象描绘．对于象征性的树,如风景画中的远景树木,本方法亦能很好地适应．进一步地,更高级的几何造型也可通过三维显象实现,实现中需增加叶、花等植物成份,以及枝上的树皮纹理、结节和树干的扭弯．同时,它尚可体现外界因素的约束,如光线照射、风或重力的作用等．特别地,近年来分支矩阵模型还被应用在物理学中的碎片分支结构的研究中．

参　考　文　献

1 Kevin W. Modelling natural branching structures. Computer Graphics Forum,1988,(7):105～115

2 Aono M,Kunii T L. Botanical tree image generation. IEEE Computer Graphics & Application,1984,4(5):10～34

3 Smith A R. Plants fractals and formal languages. Computer Graphics,1984,18(3):1～10

4 Prusinkiewicz P. Graphical application of L－systems. Proc. of Graphics Interface,1986,(2):47～53

5 Reeves T. Particle system a technique for modelling a class of fuzzy objects. ACM Transaction on Graphics, 1983,2(2):91～108

Spanning Tree Based on Component Matrix

Fan Huilin　Zhang Quanhuo

(Dept. of computer science, Huaqiao Univ. ,362011, Quanzhou)

Abstract Based on the concept of component matrix and the idea of applying it for randomly generating the image of tree, an algorithm implementing by Turbo Pascal is given for randomly generating a tree containing component matrix. This method is briefly discussed.

Keywords tree, component matrix,algorithm, computer image