

系统的分散与集中决策*

(I)局部优化子系统设计

王永初

(华侨大学精密机械工程系, 泉州 362011)

摘要 提出一种建立在Buttworth滤波器和范型传递函数基础上的标准和优化的闭环传递函数. 它可应用于控制系统的极点配置和反馈状态控制器的设计, 文中还给出1至12维系统的最优传递函数表以及非范型至范型结构的变换过程.

关键词 分散系统, 集中系统, 局部优化, 最优传递函数, Buttworth 滤波器

分类号 TP 273

分散符合优化决策的原则

许多人认为系统愈集中控制效果愈好, 因此, 追求装置的容量与速度. 系统过份集中, 运行机制就愈不灵活. 生产过程系统是一个动态系统, 而且往往是一个维数庞大的大系统. 按照一对方程(状态方程与输出方程, 即 $\dot{X} = AX + BU$, $Y = CX$.) 对应一个目标函数 $J = \int_0^T f(X, U)dt$ 来确定最优控制向量 U^* . 状态 X 的维数高是求解的一大难题, 维数高目标函数 J 就难于确定, 即使是最简单的二次型目标函数 $J = \int_0^T [X^T Q X + U^T R U] dt$, Q 与 R 权函数也难于确定. 特高维数系统的权矩阵 Q 与 R 目前尚无有效的求解方法, 因此, 人们很自然地想到系统的分散. 目前系统分散有两种方法: (1) 系统解耦; (2) 控制目标函数分离, 即动态规划方法. 按动态规划的优化原则, 可得 $\min J = \min_{u_1} \{f_1 + \min_{u_2} [f_2 + \min_{u_3} (f_3 + \dots)]\}$, 或 $\min J = \min_{u_n} \{f_n + \min_{u_{n-1}} [f_{n-1} + \min_{u_{n-2}} (f_{n-2} + \dots)]\}$. 即一个整体的优化系统等价于局部优化系统的总和. 整体系统的分散要符合状态转移为半群的特性, 即 $X_1 = T(X_0, U_1)$, $X_2 = T(X_1, U_2)$, \dots , $X_N = T(X_{N-1}, U_N)$. 因此, 整体系统可分离成图1的结构方框图.

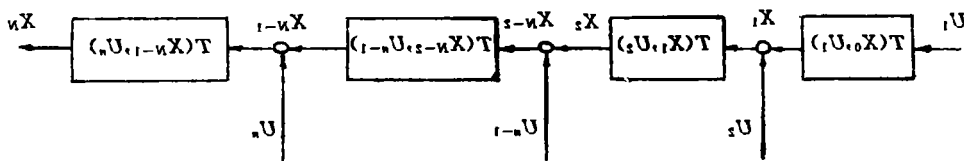


图1 整体系统的一种分散形式

* 本文1993-11-01收到;福建省自然科学基金资助项目

作者提出的优化原则为 $\min J \geq \min_{j_1} J_1 \{f_1 + \min_{j_2} [f_2 + \min (f_2 + \dots)]\}$, 或 $\min J \geq \min_{j_N} J_N \{f_N + \min_{j_{N-1}} [f_{N-1} + \min (f_{N-2} + \dots)]\}$. 即局部优化系统效果的总和大于(或优于)整体优化系统的效果. 上述各式中的 $\min J$ 或 $\min J_i$ 均表示效果, 如误差平方积分函数最小, 则系统控制品质最好, 效果也最佳. 作者提出的优化原则指出: 系统分散优化不仅可能, 而且是十分必要的. 这个原则的证明, 涉及系统控制品质的定量计算.

2 系统控制的定量化设计

2.1 最优传递函数

最优是指符合某一个准则函数, 达到拟合误差函数的函数值最小. 控制系统的要求不同, 准则函数亦不同. 常见的准则函数有: (1) ISE 准则, 即 $J = \int_0^{t_1} e^2(t) dt \rightarrow \text{最小}$; (2) ITAE 准则, 即 $J = \int_0^{t_1} |e(t)| dt \rightarrow \text{最小}$; (3) ISTSE 准则, 即 $J = \int_0^{t_1} [e(t)t \cdot e(t)t] dt \rightarrow \text{最小}$. 现代控制理论对于优化目标函数有广泛的内容, 如二次型目标函数 $J = \int_0^{t_1} (X^T Q X + U^T R U) dt \rightarrow \text{最小}$. 早在1961年 S. S. L. Chang 就在他的论著中^[1]提出最优闭环传递函数 $W^*(s)$ 的构成为 $W^* = \frac{1}{Y(s)Z(s)} \left[\frac{Z(s)}{Y(-s)} \right]_+$, 式中, $Y(s)Z(-s) \triangleq 1 + \lambda^2 / G(s)G(-s)$, $Z(s) \triangleq [R(s)R(-s)]_+$. 其中, $G(s)$ 为被控制对象特性; $R(s)$ 为系统的给定值输入; λ 为待定系数; $[\]_+$ 表示括号内零极点处于 s 复平面左边的函数部分. 但是这种方法对多维系统应用不太方便. 1980年 G. F. Franklin^[2]根据 Butterworth 滤波器原理, 提出了最优闭环传递函数的构想. Butterworth 滤波器的传递函数 $H(s)$ 有如下关系 $H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (S/j\omega_0)^{2n}}$, 得到 $H(s)H(-s)$ 的极点为

$$S = j\omega_0 e^{j(2nk/2n)} e^{j(\pi/2n)}, k = 1, 2, 3, \dots, 2n, \quad (1)$$

其中, ω_0 为频带极限, 即满足 $|H(j\omega)H(-j\omega)| = 0.5$ 或 $|H(j\omega)| = 0.707$. 这种滤波器, 当频率信号高于 ω_0 时, 衰减很快, 而对低频信号却有好的响应特性. 因此, 它适合作为生产过程系统的预期传递函数. 式(1)可以改写成 $S/\omega_0 = e^{j(nk/\pi)} e^{j(\pi/2 + n/2n)}$, $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$. 当 $n=3$ 时, 系统 $H(s)H(-s)$ 的六个根分别为: $S_1/\omega_0 = e^{j\pi} = -1$; $S_2/\omega_0 = e^{j(\pi + \frac{\pi}{3})}$; $S_3/\omega_0 = e^{j(\pi + \frac{2\pi}{3})}$; $S_4/\omega_0 = e^{j2\pi} = 1$; $S_5/\omega_0 = e^{j(2\pi + \frac{\pi}{3})}$; $S_6/\omega_0 = e^{j(2\pi + \frac{2\pi}{3})}$. 其根分布如图2所示. 显然, $H_3(s)$ 的三个根分别为: $S_1/\omega_0 = -1$;

$S_2/\omega_0 = e^{j(\pi + \frac{\pi}{3})}$; $S_3/\omega_0 = e^{j(2\pi + \frac{2\pi}{3})}$. 故有

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(\bar{S} + 1)(\bar{S} - e^{j(\pi + \frac{\pi}{3})})(\bar{S} - e^{j(2\pi + \frac{2\pi}{3})})} \\ &= \frac{1}{(\bar{S} + 1)[\bar{S}^2 - (e^{j(\pi + \frac{\pi}{3})} + e^{j(2\pi + \frac{2\pi}{3})})\bar{S} + 1]} \\ &= \frac{1}{(\bar{S} + 1)(\bar{S}^2 + \bar{S} + 1)} = \frac{1}{\bar{S}^3 + 3\bar{S}^2 + 2\bar{S} + 1} \end{aligned}$$

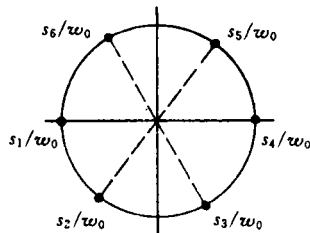


图2 三阶 $H(s)H(-s)$ 的根分布

式中, $\bar{S} = S/\omega_0$. 按照这种方法, 可以得到表1所示的4~9阶 $H(s)$

的根分布及表2所示的 $H(s)$ 的最优特征方程式.

表1 4~9阶 $H(s)$ 的根分布

阶次	$H(s)$ 的根分布 \bar{s}_i
4	$e^{j(\pi-\frac{\pi}{8})}, e^{j(\pi+\frac{\pi}{8})}, e^{j(\pi-\frac{3\pi}{8})}, e^{j(\pi+\frac{3\pi}{8})}$
5	$-1, e^{j(\pi-\frac{4}{10}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{4}{10}\pi)}, e^{j(\pi-\frac{2}{10}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{2}{10}\pi)}$
6	$e^{j(\pi-\frac{\pi}{12})}, e^{j(\pi+\frac{\pi}{12})}, e^{j(\pi-\frac{3\pi}{12})}, e^{j(\pi+\frac{3\pi}{12})}, e^{j(\pi-\frac{5\pi}{12})}, e^{j(\pi+\frac{5\pi}{12})}$
7	$-1, e^{j(\pi-\frac{2}{14}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{2}{14}\pi)}, e^{j(\pi-\frac{4}{14}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{4}{14}\pi)}, e^{j(\pi-\frac{6}{14}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{6}{14}\pi)}$
8	$e^{j(\pi-\frac{\pi}{18})}, e^{j(\pi+\frac{\pi}{18})}, e^{j(\pi-\frac{3\pi}{18})}, e^{j(\pi+\frac{3\pi}{18})}, e^{j(\pi-\frac{5\pi}{18})}, e^{j(\pi+\frac{5\pi}{18})}, e^{j(\pi-\frac{7\pi}{18})}, e^{j(\pi+\frac{7\pi}{18})}$
9	$-1, e^{j(\pi-\frac{2}{18}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{2}{18}\pi)}, e^{j(\pi-\frac{4}{18}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{4}{18}\pi)}, e^{j(\pi-\frac{6}{18}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{6}{18}\pi)}, e^{j(\pi-\frac{8}{18}\pi)}, e^{j(\pi+\frac{8}{18}\pi)}$

应用数学归纳法, 不难得出 $H(s)$ 根 \bar{s}_i 的一般公式, 即当 n 为偶数时, $\bar{s}_i = e^{j[\pi \pm (2k-1)\pi/2n]}$, $k=1, 2, \dots, n/2$; 当 n 为奇数时, $\bar{s}_i = e^{j[\pi \pm 2k\pi/2n]}$, $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)/2$. 注意如下事实: (1) $e^{j(\pi+\varnothing)} + e^{j(\pi-\varnothing)} = -1 \cdot (e^{j\varnothing} - e^{-j\varnothing}) = -2\cos\varnothing$; (2) n 为奇数时, 有一个 (-1) 的根, 且有成对出现的共轭根; n 为偶数时, 均为成对出现的共轭根. 因此, 最优的特征方程为 (1) $(\bar{s}+1)=0$; (2) $(\bar{s}^2+1.414\ 2\bar{s}+1)=0$; (3) $(\bar{s}^2+\bar{s}+1)(\bar{s}+1)=0$; (4) $(\bar{s}^2+1.847\ 8\bar{s}+1)(\bar{s}^2+0.765\ 4\bar{s}+1)=0$; (5) $(\bar{s}^2+1.618\bar{s}+1)(\bar{s}^2+0.618\bar{s}+1)(\bar{s}+1)=0$; (6) $(\bar{s}^2+1.931\ 9\bar{s}+1)(\bar{s}^2+1.414\ 2\bar{s}+1)(\bar{s}^2+0.517\ 6\bar{s}+1)=0$

表2的最优传递函数系数就是根据上述原理作出的, $H=1/\bar{s}^n + a_{n-1}\bar{s}^{n-1} + a_{n-2}\bar{s}^{n-2} + \dots + a_1\bar{s} + a_0$. 按照表2选择闭环传递函数的系统, 可以得到比较理想的系统响应曲线. 图3的曲线(a)与(b)分别为 $n=4$ 与 $n=7$ 的 $H(s)$ 的阶跃响应曲线.

表2 最优传递函数系数表

n	a_{11}	a_{10}	a_9	a_8	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1												1
2											1.414	1
3										3	2	1
4									2.613	3.144	2.613	1
5								3.236	5.235	5.235	3.236	1
6							3.863	7.464	9.141	7.464	3.863	1
7						4.493	10.097	14.591	14.591	10.097	4.493	1
8					5.125	13.137	21.846	25.688	21.846	13.137	5.125	1
9				5.758	16.581	31.163	41.486	41.986	31.163	16.581	5.758	1
10			6.332	18.166	36.890	53.8279	61.683	53.827	36.890	18.166	6.332	1
11		7.026	24.686	57.017	95.931	123.236	123.236	95.931	57.017	24.686	7.026	1
12	7.661	27.348	66.417	118.860	166.655	185.663	166.655	118.860	66.417	27.348	7.661	1

2.2 最优反馈控制

2.2.1 对象传递函数的无因次化 工程对象的传递函数通常都是有因次的, 如

$$G(s) = \frac{k}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0},$$

式中, k 与 a_i ($i=1, 2, \dots, n$) 都是有单位的, a_n 为时间单位的 n 次方, a_{n-1} 为时间单位的 $(n-1)$ 次方, \dots , a_1 为时间单位, a_0 为无单位的数, 通常取 $a_0=1$. 由于对象传递函数测试经常是包含执行器/调节阀与检测/变送器在内的广义特性, 因而对象的输入与输出信号可认为是同一仪表信号制的信号. 于是 k 也可转换成无量纲的数值, 并取 (1) $\omega_0 = 1/a_n^{1/n}$ 或者 $a_n = (1/\omega_0)^n$; (2) $\bar{s} = s/\omega_0$. 则有

$$\begin{aligned}
 a_{n-1} &= a_{n-1} \omega_0^{n-1} = a_{n-1} (a_n)^{-(n-1)/n}, \\
 a_{n-2} &= a_{n-2} \omega_0^{n-2} = a_{n-2} (a_n)^{-(n-2)/n}, \\
 &\vdots \\
 a_{n-i} &= a_{n-i} \omega_0^{n-i} = a_{n-i} (a_n)^{-(n-i)/n}, \\
 &\vdots \\
 a_1 &= a_1 \omega_0 = a_1 (a_n)^{-1/n},
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

于是无因次化对象传递函数可写成

$$H(\bar{S}) = \frac{1}{\bar{S}^n + a_{n-1} \bar{S}^{n-1} + a_{n-2} \bar{S}^{n-2} + \dots + a_1 \bar{S} + 1}.$$

例如,某对象传递函数

$$G(s) = \frac{1.2}{(TS + 1)^4},$$

其中, $n=4, T=10$ s. 于是此式可演变成有理多项式形式

$$G(s) = \frac{1.2}{10\,000s^4 + 4\,000s^3 + 600s^2 + 40s + 1},$$

利用式(2)关系可得

$$G(\bar{S}) = \frac{1.2}{\bar{S}^4 + 4\bar{S}^3 + 6\bar{S}^2 + 4\bar{S} + 1}. \quad (3)$$

2.2.2 状态反馈校正 式(3)转换成状态方程式

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.2 \end{bmatrix}.$$

引入反馈控制规则,得

$$U = R - KX, \quad (5)$$

其中, R 为系统的给定输入, $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ 为反馈控制向量, $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 为状态向量.

式(5)代入式(4)得到 $\dot{X} = (A - KB)X + BR = A_M X + BR$. 其中

$$A_M = A - KB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - kK_1 & -a_1 - kK_2 & -a_3 - kK_3 & -a_4 - kK_4 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

A_M 为闭环系统的系统状态矩阵. 由它与最优的系统矩阵比较,可以确定式(6)中的 K_i , 其中, $i=1, 2, 3, 4$. 由表2知道4阶系统的最优系统矩阵为

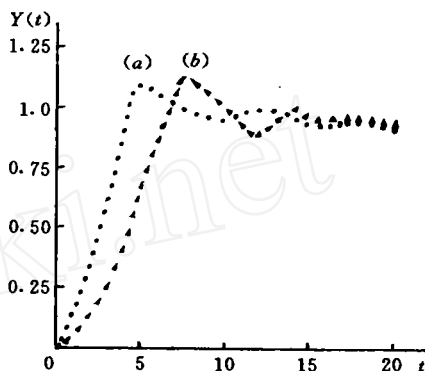


图3 $H(s)$ 函数的单位阶跃响应曲线

$$A_i^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2.6132 & -3.1443 & -2.6132 \end{bmatrix} \quad (7)$$

比较式(6)与式(7)求得 $K_{i+1} = (a_i^* - a_i)/k, i=0, 1, 2, 3$, 故有 $K = [k_1, k_2, k_3, k_4] = [0, -1.1557, -2.3800, -1.1557]$. 校正后的系统传递函数为

$$G(\bar{s})^* = \frac{1.2}{\bar{s}^4 + 2.6132\bar{s}^3 + 3.1443\bar{s}^2 + 2.6132\bar{s} + 1}$$

图4比较式(5)与上式闭环传递函数 $G(\bar{s})^*$ 的单位阶跃响应曲线, 其中, (a) 为校正后的系统响应曲线; (b) 为校正前的系统响应曲线. 图4的曲线为无因次时间, 根据

拉普拉斯变换的时间比例定理 $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(s/a)$, $\mathcal{L}\{f(\bar{t})\} = F(\bar{s})$, 可知实际时间轴的时标 t 与转换函数时标 \bar{t} 关系为 $\bar{t} = t/\bar{a}$.

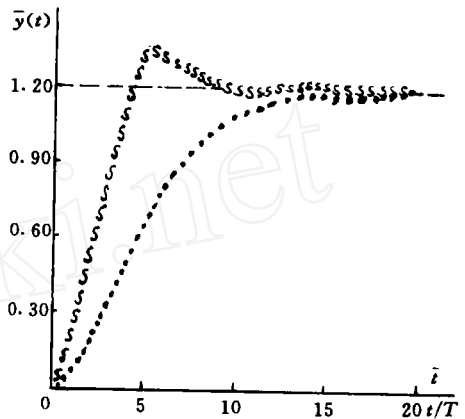


图4 式(21)对象校正前各响应曲线的比较

参 考 文 献

- 1 Gene F F. Digital control of dynamic systems. New York: Addison-Wesley, 1990. 61~73
- 2 Bryson A E. Applied optimal control. New York: McGraw-Hill, 1969. 230~254
- 3 王永初. 自动化系统设计的系统学. 重庆: 重庆出版社, 1989. 377~390

Decision about Decentralization and Centralization of System

(I) Design of Locally Optimized Subsystems

Wang Yongchu

(Dept. of Precis. Mech. Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract A standard and optimized closed-loop transfer function is proposed in this paper. It is based on Butterworth filter and normalized transfer function. It can be used in the pole location of control system and the design of feedback controller. The table of optimal transfer function of one to twelve dimensional systems and the transformation process from non-normalized to normalized structures are also given.

Keywords decentralized system, centralized system, local optima, optimized transfer function, Butterworth filter