

# 测小角法在高层建筑倾斜观测中的应用\*

王 仁 谦

(华侨大学土木工程系, 泉州 362011)

**摘要** 论述测小角法测定高层建筑物竖直轴线上、下相对位移量, 以确定倾斜角的原理和方法. 它具有比前方交会法精度高、外业工作量少和计算快速等优点.

**关键词** 小角, 高层建筑, 倾斜

**分类号** TU 196.3

进行高层建筑物和塔形建筑物的倾斜观测, 关键问题是求竖直轴线上部相对下部的位移量, 而无需求出观测点的坐标. 目前广泛采用的是前方交会法, 即先求出上、下观测点的坐标, 然后求出其相对位移量, 这是一种间接的方法. 要提高位移量的测定精度, 就必须提高测定坐标的精度. 文[2]提出的微分公式只是解决计算工作量的问题, 并未对野外工作有任何改善. 本文根据位移观测的目的, 推算出位移量主要是由两个小角决定的. 因此, 可采用直接的方法——测小角法, 测定  $\Delta\alpha$  和  $\Delta\beta$ , 求其相对位移量, 才能以最少的工作量达到测定位移量的精度要求.

## 1 原理

为了推算公式方便, 采用如图1所示的坐标系.  $A$  为坐标原点,  $AB$  方向为  $x$  轴, 则

$$x_p = s_1 \cos \alpha = \frac{s \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y_p = s_1 \sin \alpha = \frac{s \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha. \quad (2)$$

当上、下两点  $P_1, P$  不处于同一铅垂线上时, 就会产生相对位移  $\mu$ . 下面推算  $\mu$  与  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  的关系式. 由式(1), (2)分别对  $\alpha, \beta$  求偏导数, 得

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = -s \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad \frac{\partial y_p}{\partial \alpha} = s \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)},$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \beta} = s \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)}, \quad \frac{\partial y_p}{\partial \beta} = s \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

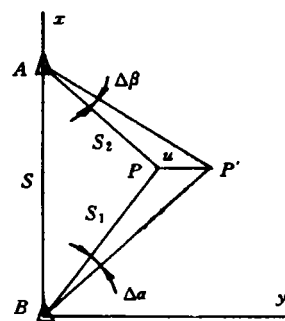


图1 位移与小角的关系

\* 本文1993-09-29收到

由  $\Delta\alpha$  和  $\Delta\beta$  求得  $P_1$  相对  $P$  的坐标增量为

$$\begin{aligned} dx_p &= \left[ -s \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} \right] \frac{\Delta\alpha''}{\rho''} + \left[ s \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \right] \frac{\Delta\beta''}{\rho''}, \\ dy_p &= \left[ s \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} \right] \frac{\Delta\alpha''}{\rho''} + \left[ s \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)} \right] \frac{\Delta\beta''}{\rho''}, \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} a_{11} &= -s \frac{\sin\beta\cos\beta}{\rho\sin^2(\alpha+\beta)}, & a_{12} &= s \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho\sin^2(\alpha+\beta)}, \\ a_{21} &= s \frac{\sin^2\beta}{\rho\sin^2(\alpha+\beta)}, & a_{22} &= s \frac{\sin^2\alpha}{\rho\sin^2(\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

则得

$$dy_p = a_{11}\Delta\alpha + a_{12}\Delta\beta, \quad (3)$$

$$dx_p = a_{21}\Delta\alpha + a_{22}\Delta\beta. \quad (4)$$

式(3),(4)是由  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  求位移量的全微分公式. 由此可算得位移量  $\mu$  为

$$\mu = \sqrt{dx_p^2 + dy_p^2}, \quad (5)$$

位移方向为

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{dy_p}{dx_p}, \quad (6)$$

倾斜角  $\gamma = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\mu}{H}$ , 式中  $H$  为  $P, P_1$  的高差. 若测定  $AB$  的方位角为  $\alpha_{AB}$ , 则  $\mu$  的方位角应为  $\alpha_{\mu} = \alpha_{AB} + \theta$ .

## 2 精度分析

设  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  的测角精度相同, 即  $m_{\Delta\alpha} = m_{\Delta\beta} = m$ , 则

$$\begin{aligned} m_{\mu} &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2} m \\ &= \frac{s \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}{\rho'' \sin^2(\alpha + \beta)} \cdot m. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知, 测定位移量  $\mu$  的精度由交会图形及小角  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  的观测精度确定. 其中,  $\alpha, \beta, s$  为图形因素, 主要用于计算  $a_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$ .

### 2.1 $\alpha, \beta$ 和 $s$ 的测定误差对 $\mu$ 的影响

(1) 设测定距离  $s$  有一误差  $\Delta s$ , 即  $s' = s + \Delta s$ . 由此算得:  $a'_{ij} = (1 + \Delta s/s) a_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$ ;  $dx'_p = dx_p (1 + \Delta s/s)$ ;  $dy'_p = dy_p (1 + \Delta s/s)$ ;  $\mu' = (1 + \Delta s/s) \mu$ , 即  $\Delta\mu = \mu - \mu' = -(\Delta s/s) \mu$ . 因此,  $m_s/\mu = m_s/s$ . 根据《地基基础设计规范》对容许变形值的规定, 当  $H$  小于 100 m 时,  $\mu < 500$  mm; 当基线的丈量精度为 1/1000 时,  $m_s \leq 0.5$  mm. 这说明对基线  $s$  的精度要求较低.

(2)  $\alpha, \beta$  的测定误差对  $\mu$  的影响. 设  $\alpha, \beta$  有一误差  $d\alpha, d\beta$ , 则由  $a_{ij}$  的表达式可以推得  $a'_{11} \doteq a_{11} (1 + 2\operatorname{ctg}\beta \cdot \frac{d\beta}{\rho})$ ;  $a'_{12} \doteq a_{12} (1 + 2\operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\rho})$ ;  $a'_{21} = a_{21} (1 + 2\operatorname{ctg}2\beta \cdot \frac{d\beta}{\rho})$ ;  $a'_{22} = a_{22} (1 + 2\operatorname{ctg}2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\rho})$ . 一般来说,  $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ, 30^\circ \leq \beta \leq 60^\circ$ . 当  $d\alpha = d\beta = 1'$  时, 可得  $2\operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\rho} \ll 1, 2\operatorname{ctg}2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\rho} \ll 1, 2\operatorname{ctg}\beta \cdot \frac{d\beta}{\rho} \ll 1, 2\operatorname{ctg}2\beta \cdot \frac{d\beta}{\rho} \ll 1$ , 故  $a_{ij} = a'_{ij} (i=1, 2; j=1, 2)$ . 就是说, 当  $m_{\alpha} = m_{\beta} \leq 1'$  时,  $a_{ij}$  无变化,

因而对  $\mu$  的测定精度无影响(见后算例). 所以在实际测量中采用高精度方法测定  $\Delta\alpha, \Delta\beta$ , 而用一般方法测定  $\alpha, \beta, s$ . 测小角法的特点正是抓住问题的主要方面, 分清主次, 它既可以提高测量精度, 又可减少工作量.

## 2.2 测定小角的误差分析

它同前方交会法一样存在着瞄准观测点的误差, 不同的是测小角法不必瞄准后视方向. 这样既减少工作量, 又减少一个产生误差的因素. 另一方面, 由于  $\mu$  值较小,  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  值也不大, 故可用经纬仪的微动机构测出, 而不必转动照准部, 这也可以提高测角精度. 在一般变形观测中, 由于边长较短, 所以对中误差的影响很大. 往往需要建立观测墩, 采用强制对中的方法, 才能满足测角的要求. 然而, 测小角法因  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  都较小, 对中误差对小角的测定精度影响也较小. 下面具体讨论对小角测定精度的影响.

如图2, 假设要测定  $\Delta\alpha = \angle PAP_1$ . 因存在对中误差  $e$ , 即仪器中心位于  $A_1$ , 因而测得  $\Delta\alpha_1$  则  $\Delta\alpha = \Delta\alpha_1 + (e_1 + e_2)$ , 其中  $e_1 = \rho \cdot e \sin\theta / D_1, e_2 = \rho \cdot e \sin(\Delta\alpha_1 - \theta) / D_2$ . 由中对误差所引起的测角误差为

$$e = e_1 + e_2 = \rho \cdot e (\sin\theta / D_1 + \sin(\Delta\alpha_1 - \theta) / D_2) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} m_e^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^2 d\theta = \frac{1}{2} \rho^2 e^2 \left( \frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D_2^2} - \frac{2}{D_1 D_2} \cos\Delta\alpha_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho^2 e^2}{D_1^2 D_2^2} (D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \cos\Delta\alpha_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho e \mu}{D_1 D_2} \right)^2, \end{aligned}$$

故得  $m_e = 1/\sqrt{2} \cdot \rho e \mu / D_1 D_2$ . 由此可见, 中对误差对测小角的影响很小. 即使在最不利的情况  $\theta = \frac{1}{2} \Delta\alpha$ , 中对误差的最大影响  $e_{\max} = \rho e \mu / D_2^2 (D_1 \approx D_2)$ . 当  $D = 50 \text{ m}, e = 3 \text{ mm}, \mu = 500 \text{ mm}$  时, 可得  $e_{\max} = 0.12''$ ,  $m_e = 0.087''$ . 当边长更长时, 此项误差将会更小, 因而采用一般的对中方法即可满足测角精度的要求和减少建立观测墩的费用. 综上所述, 测小角法比前方交会法优越得多.

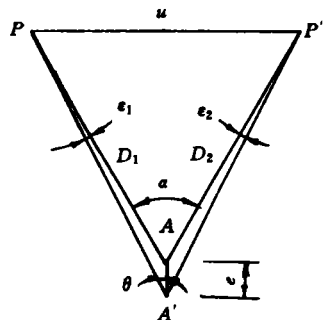


图2 中对误差对测角的影响

## 3 实际应用

以下介绍实际操作步骤. (1)根据建筑物的高度及现场情况选择点  $A, B$ , 使其到  $P$  点的距离尽量短, 且能方便地观测测点. (2)测定  $\alpha, \beta$  和  $s$ . (3)计算  $a_{11}, a_{12}, a_{21}$  和  $a_{22}$ . (4)由式(7)及  $m_s$  的精度要求确定测角精度  $m_{\Delta\alpha}$ , 选择测小角的方法. (5)观测小角  $\Delta\alpha$  和  $\Delta\beta$ . (6)用式(3)~(6)计算  $dx, dy, \mu$  和  $\theta$ .

实例. 观测某烟囱上、下中心的位移量. 先用简易方法测得  $\alpha = 50^\circ 30', \beta = 45^\circ 58', s = 78.5 \text{ m}$ , 并算得  $a_{11} = -0.193, a_{12} = 0.189, a_{21} = 0.199, a_{22} = 0.230$ .

由式(7)得  $m_s = 0.407 m_{\Delta\alpha}$ , 故  $m_{\Delta\alpha} = 2.46 m_s$ . 要求  $\mu$  的测定精度  $m_\mu = 5 \text{ mm}$ , 则  $m_{\Delta\alpha} = 12.6''$ , 且用  $J_6$  级仪器的1个测回已能满足此要求. 实测  $\Delta\alpha = 3' 12'', \Delta\beta = -1' 00''$ , 则由式(3), (4)可算得  $dx = -48.4 \text{ mm}, dy = 24.4 \text{ mm}, \mu = 54.2 \text{ mm}, \theta = 153^\circ 15'$ .

在上例中, 当  $\alpha, \beta$  变化  $1'$  时,  $a_{ij}$  不变, 这同前面结论一致. 由边长  $s$  的误差所引起的位移测定误差  $\Delta\mu = \frac{\Delta s}{s} \mu$ . 若边长的相对误差为  $1/200$ , 则  $\Delta\mu = \frac{1}{200} \mu < 0.3 \text{ mm}$ , 它相对于  $m_\mu = 5 \text{ mm}$ , 完

全可忽略不计.由此可见,对 $\alpha, \beta$ 和 $s$ 的测量精度要求是很低的.当 $A, B$ 不通视时,只要采用一些间接方法即可求出.

## 4 结论

采用测小角法测定位移值,在对中误差范围内对其影响很小,对 $\alpha, \beta$ 和 $s$ 的测量精度要求也较低.位移观测的精度,主要是由测小角的精度来决定的.两测站之间不要求互相通视,这给测站的选择带来很大的方便.同前方交会法相比较,它具有方便、快速、精度高等优点.在不必求定坐标,只需测定微小位移的情况下,可以采用此法.

## 参 考 文 献

- 1 於宗俦,鲁成林.测量平差基础:增订本.北京:测绘出版社,1983.46~60
- 2 Рабцевич И С.测定烟囱倾斜度的微分公式.测绘译丛,1984,(4):80~85
- 3 罗时恒主编.地形测量学.北京:冶金工业出版社,1986.150~200

## Measuring the Inclination of High Building by the Method of Surveying Small Angles

Wang Renqian

(Dept. of Civil Eng., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

**Abstract** For measuring the inclination of high building, the author applies the method of surveying two small angles and discusses its principle. By applying this method, the relative displacement of small angles up and down the vertical axis is surveyed and the angle of inclination of high building is determined. The method excels that of forward intersection in its high precision, less field work, and rapid calculation.

**Keywords** small angle, high building, inclination