第 15 卷 第 2 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 15 No. 2
1994 年 4 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1994

带电椭球在各向异性介质中的静电势*

郭震宁 陈燊年 林文枝

(华侨大学电气技术系,泉州 362011)

摘要 从静电场的基本规律出发,采用等效方法导出带电椭球在各向异性介质中的静电势表达式.

关键词 各向异性介质,带电椭球,静电势

分类号 O 441.1

在实际的电磁场工程中,经常会碰到带电椭球的静电势问题.目前有关资料仅给出各向同性介质中的结果,远不能满足实际工程的需要.为此,本文讨论更为普遍的各向异性介质中带电椭球的静电场问题,并采用等效方法导出其静电势的表达式.

1 坐标变换与等效方法

在静电场中,描写点电荷电场的高斯定理表成(点电荷 e 位于 $\boldsymbol{x}$ 空间坐标原点处)[1]

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial D_i}{\partial X_i} = e\delta(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

对于 $\boldsymbol{x}$ 空间充满各向异性介质的情况,有[2]

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j = -\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial X_j}, \tag{2}$$

式中,$\varepsilon_{ij}(i,j=1,2,3)$是各向异性介质的相对介电常数张量.把式(2)代入式(1),得

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = -e\delta(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

若取介质的三个主轴为 x_1, x_2, x_3 轴,则式(3)可简化为

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_0 \varepsilon_{ii} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = -e\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3), \tag{4}$$

式中,$\varepsilon_{ii}(i=1,2,3)$是各向异性介质的相对介电常数张量的三个主值.作坐标变换,得

$$x_1 = y_1\sqrt{\varepsilon_{11}}, \quad x_2 = y_2\sqrt{\varepsilon_{22}}, \quad x_3 = y_3\sqrt{\varepsilon_{33}}, \tag{5}$$

并称 y_1, y_2, y_3 为各向异性坐标系,则式(4)变为

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}\delta(y_1)\delta(y_2)\delta(y_3). \tag{6}$$

---

* 本文 1993-09-23 收到

式(6)在形式上和真空内的点电荷电场的区别只是用 $e'=\frac{e}{\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}$ 代替了 e. 这说明,经式(5)变换后,求解各向异性介质内的静电场问题可转变成求解真空中的静电场问题,只不过点电荷量变为原来的 $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}$ 倍. 由此可得出如下结论:在各向同性坐标系 $x_1x_2x_3$ 中,点电荷 e 在各向异性介质中产生的电势,经式(5)变换后,可等效为在各向异性坐标系 $y_1y_2y_3$ 中,点电荷 $e'=\frac{e}{\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}$ 在各向同性介质(真空)中产生的电势.

由上述结论推知,经式(5)变换后,在各向同性坐标系 $x_1x_2x_3$ 中,带电量 q 的椭球面 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ 在各向异性介质中产生的电势,可等效为在各向异性坐标系 y_1,y_2,y_3 中,带电量 $q'=\frac{q}{\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}$ 的椭球面 $\frac{y_1^2}{a^2/\varepsilon_{11}}+\frac{y_2^2}{b^2/\varepsilon_{22}}+\frac{y_3^2}{c^2/\varepsilon_{33}}=1$ 在各向同性介质(真空)中产生的电势.

2 带电椭球静电势的推导

由上述的坐标变换与等效方法,我们可以在 y 空间中求解带电椭球的静电势. 现设有一曲面组

$$\frac{y_1^2}{(a^2/\varepsilon_{11})+u}+\frac{y_2^2}{(b^2/\varepsilon_{22})+u}+\frac{y_3^2}{(c^2/\varepsilon_{33})+u}=1,\ (0\leqslant u<+\infty). \tag{7}$$

如果上式所表示的曲面组能用来代表带电椭球面 $\frac{y_1^2}{a^2/\varepsilon_{11}}+\frac{y_2^2}{b^2/\varepsilon_{22}}+\frac{y_3^2}{c^2/\varepsilon_{33}}=1$ 的等势面族,则每一个电势值 φ 都相当于一定的 u 值,即

$$\varphi=f(u), \tag{8}$$

但 φ 必须满足拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2\varphi=0, \tag{9}$$

注意到 $u=u(y_1,\ y_2,\ y_3)$,则对式(8)求 y_1 的一阶和二阶偏导,有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=\frac{\partial\varphi}{(\partial u}\frac{\partial u}{\partial y_1}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y_1};\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}=\frac{\partial}{\partial y_1}[f'(u)\frac{\partial u}{\partial y_1}]=f''(u)\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial u}{\partial y_1}+f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}.$$

同理可求得 $\frac{\partial\varphi}{\partial y_2},\frac{\partial\varphi}{\partial y_3}$ 和 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2},\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_3^2}$,所以式(9)可写成

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi&=f''(u)[(\frac{\partial u}{\partial y_1})^2+(\frac{\partial u}{\partial y_2})^2+(\frac{\partial u}{\partial y_3})^2]+f'(u)[\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2}]\\&=f''(u)(\nabla u)^2+f'(u)\nabla^2 u=0.\end{aligned} \tag{10}$$

则

$$\nabla^2 u/(\nabla u)^2=-f''(u)/f'(u), \tag{11}$$

上式表明,如果式(7)所表示的曲面组能用来代表等势面族,则 $\nabla^2 u/(\nabla u)^2$ 就必须只是 u 的函数,而与 y_1,y_2,y_3 值无直接关系[3].

实际上,这一条件不仅是必要的,而且也是充分的. 因为只要满足了这一条件,就可以从式(7)中求出电势函数 $\varphi=f(u)$. 现令

$$\left.\begin{aligned}M_n&=\frac{y_1^2}{(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)^n}+\frac{y_2^2}{(\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u)^n}+\frac{y_3^2}{(\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u)^n},\\ N&=\frac{1}{\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u}+\frac{1}{\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u}+\frac{1}{\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u}.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

注意到 $u=u(y)$，对式(7)求 y_1 的一阶偏导数并利用式(12)，可得 $\partial u/\partial y_1=2y_1/M_2(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)$. 同理可得　$\partial u/\partial y_2=2y_2/M_2(\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u)$；$\partial u/\partial y_3=2y_3/M_2(\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u)$.　故有

$$(\nabla u)^2=\sum_{i=1}^{3}(\partial u/\partial y_i)^2=4/M_2.\tag{13}$$

再求式(7)对 y_1，y_2，y_3 的二阶偏导数，分别得

$$\frac{\partial u}{\partial y_1^2}=\frac{2}{M_2(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)}-\frac{8y_1^2}{M_2^2(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)^3}+\frac{8y_1^2M_3}{M_2^3(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2^2}=\frac{2}{M_2(\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u)}-\frac{8y_2^2}{M_2^2(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)^3}+\frac{8y_2^2M_3}{M_2^3(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_3^2}=\frac{2}{M_2(\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u)}-\frac{8y_3^2}{M_2^2(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)^3}+\frac{8y_3^2M_3}{M_2^3(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)^2};$$

因而有

$$\nabla^2u=\sum_{i=1}^{3}(\partial^2u/\partial y_i^2)=2N/M_2,\tag{14}$$

从而

$$\nabla^2u/(\nabla u)^2=N/2\tag{15}$$

比较式(11)和式(15)，有

$$-\frac{f''(u)}{f'(u)}=\frac{N}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u}+\frac{1}{\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u}+\frac{1}{\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u}),\tag{16}$$

于是，由式(16)可求出式(8)中的电势 φ. 容易证实，下式恒等式成立，即 $f''(u)/f'(u)=\mathrm{d}/\mathrm{d}u[\ln f'(u)]$. 把式(16)代入上式并对 u 积分，得　$-\int\frac{N}{2}\mathrm{d}u=\ln[f'(u)]+A'$，　由此解得 $f'(u)=A\mathrm{e}^{-\int\frac{N}{2}\mathrm{d}u}$.

再对 u 积分一次，有　$\varphi=f(u)=A\int\mathrm{e}^{-\int\frac{N}{2}\mathrm{d}u}\mathrm{d}u+B$,

用式(16)代入求积分得

$$\varphi=f(u)=A\int^{u}[(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)(\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u)(\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u)]^{-1/2}\mathrm{d}u+B,\tag{17}$$

选取 $u=+\infty$，$\varphi=0$，则由式(17)可得积分常数 B 为

$$B=-A\int^{\infty}[(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)(\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u)(\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u)]^{-1/2}\mathrm{d}u,\tag{18}$$

代回式(17)，得

$$\varphi=-A\int_{u}^{\infty}[(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)(\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u)(\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u)]^{-1/2}du. \tag{19}$$

如前所述,真空中带电椭球面 $\frac{y_1^2}{a^2/\varepsilon_{11}}+\frac{y_2^2}{b^2/\varepsilon_{22}}+\frac{y_3^2}{c^2/\varepsilon_{33}}=1$ 的总电荷为 $q'=\frac{q}{\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}$,而 u 很大处的电场必为库仑场,即场强为 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 y^2}$,$y=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$ 为场点离带电椭球面中心点的距离. 当 u 很大时,忽略$\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}$,$\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}$,$\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}$,可得

(1) 由式(7),此时

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=y^2\to u, \tag{20}$$

将上式对 y 求一阶导数,有

$$\partial u/\partial y\to 2y, \tag{21}$$

(2)由式(19),此时 $\varphi\to-2Au^{-\frac{1}{2}}$,对此式求 u 的一阶导数,有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\to\frac{A}{u^{3/2}}\xlongequal{u\to y^2}\frac{A}{y^3}, \tag{22}$$

由(21),(22)式,可得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{A}{y^3}\cdot 2y=\frac{2A}{y^2}=-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 y^2}, \tag{23}$$

因此,常数 A 为

$$A=-\frac{q'}{8\pi\varepsilon_0}=-\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}. \tag{24}$$

代入式(19),就得到在各向异性坐标系 $y_1y_2y_3$ 中,带电量 q' 的椭球面$\frac{y_1^2}{a^2/\varepsilon_{11}}+\frac{y_2^2}{b^2/\varepsilon_{22}}+\frac{y_3^2}{c^2/\varepsilon_{33}}=1$ 在真空中产生的电势,也即在原坐标系 $x_1x_2x_3$ 中,带电量 q 的椭球面$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ 在各向异性介质中产生的电势为

$$\varphi(u)=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}\int_{u}^{\infty}[(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u)(\frac{b^2}{\varepsilon_{22}}+u)(\frac{c^2}{\varepsilon_{33}}+u)]^{-\frac{1}{2}}du, \tag{25}$$

而与 $\varphi(u)$相应的等势面族即是由式(7)给出的曲面组,若用 $x_1x_2x_3$ 坐标系表示其等势面族即为

$$\frac{x_1^2}{a^2+\varepsilon_{11}u}+\frac{x_2^2}{b^2+\varepsilon_{22}u}+\frac{x_3^2}{c^2+\varepsilon_{33}u}=1.$$

3 讨论

以上我们导出了带电量为 q 的椭球面$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ 在各向异性介质中产生的静电势. 若要求得带电量为 q 的球面(半径为 a)在各向同性介质(相对介电常数为 ε_r)中产生的静电势,可令式(25)中的 $a=b=c$,$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon_r$,则

$$\varphi(u)=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\sqrt{\varepsilon_r}}\int_{u}^{\infty}(\frac{a^2}{\varepsilon_r}+u)^{\frac{3}{2}}du,$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\sqrt{a^2+\varepsilon_r u}}. \tag{26}$$

由式(7)，得　$a^2/\varepsilon_r+u=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，　把式(5)代入上式可得

$$\frac{a^2}{\varepsilon_r}+u=\frac{1}{\varepsilon_r}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\frac{1}{\varepsilon_r}r^2, \tag{27}$$

或

$$a^2+\varepsilon_r u=r^2, \tag{28}$$

把式(28)代回式(26)得

$$\varphi(u)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}.$$

此结果正是我们所预料的.

若要求解各向异性介质中导电球(半径为 a)的电容 c，则在式(25)中令　a=b=c，积分下限 $u=0$，便可得

$$\frac{1}{c}=\frac{\varphi}{q}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}}\int_0^\infty\left[\left(\frac{a^2}{\varepsilon_{11}}+u\right)\left(\frac{a^2}{\varepsilon_{22}}+u\right)\left(\frac{a^2}{\varepsilon_{33}}+u\right)\right]^{-\frac{1}{2}}du,$$

此结果与文献[1]中的结果相同. *

参　考　文　献

1　朗道 ππ. 连续媒质电动力学：上册. 北京：人民教育出版社，1963. 88～89

2　陈季丹，刘子玉. 电介质物理学. 北京：机械工业出版社，1982. 89～90

3　解广润. 高压静电场. 增订版. 上海：上海科学技术出版社，1987. 105～106

Electrostatic potential of charged Ellipsoid in Anisotropic Media

Guo Zhenning　Chen Xinnian　Lin　Wenzhi

(Dept. of Electric Technique, Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract　Starting off with the basic rule of electrostatic field, the authors derive an expression for the electrostatic potntial of charged ellipsoid in anisotropic media by the method of equal effects.

Keywords　anisotropic media, charged ellipsoid, electrostatic potential

* 因单位制的不同而有因子 $1/4\pi\varepsilon_0$ 的差别