第15卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 15 No. 2
1994年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1994

一类矩阵的迭代法的误差检验*

王 子 丁

(华侨大学系管理信息科学,泉州 362011)

摘要 讨论使用迭代法解线性代数方程组的误差检验问题.并给出使用迭代法解偏微分方程数值解的误差检验的例子.

关键词 矩阵,迭代法,误差检验

分类号 O 241.6

在用有限差分法或用有限元法求解偏微分方程的数值解时,最后出现为线性代数方程组

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}\,, \tag{1}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{u},\boldsymbol{b}$ 是 n 维向量,并且都是实数.我们使用迭代格式

$$\boldsymbol{u}^{(k+1)}=\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{u}^{(k)}+\boldsymbol{d}, \tag{2}$$

进行迭代求解,其中 G 是一个 $n\times n$ 阶矩阵,称为迭代矩阵,$\boldsymbol{d}$ 是已知向量,$\boldsymbol{u}^{(k)}$ 是第 k 次迭代解,而 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ 是任意选定的初始向量.

设 $\bar{u}$ 是(1)的精确解,定义误差向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{u}^{(k)}-\bar{\boldsymbol{u}}, \tag{3}$$

对于事先给定的精确度要求 $\varepsilon>0$,按道理应该使 $\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\|<\varepsilon$ 时,迭代过程为终结,此时,$\boldsymbol{u}^{(k)}$ 为所得满足精确度要求的近似解.其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_\infty$,但是由于 $\bar{u}$ 是未知的,所以 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$ 也不可能知道的.通常,判断迭代过程的终结,有如下办法,设残余向量

$$\boldsymbol{\delta}^{(k)}=\boldsymbol{u}^{(k+1)}-\boldsymbol{u}^{(k)}, \tag{4}$$

在一般计算方法中,根据在 $\|G\|$ 不太接近于1的情况下,有误差公式[1]

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\|\leqslant\frac{\|G\|}{1-\|G\|}\cdot\|\boldsymbol{\delta}^{(k)}\|. \tag{5}$$

得出判断迭代终结的公式

$$\|\boldsymbol{\delta}^{(k)}\|<\varepsilon. \tag{6}$$

这里相当于用 $\|\boldsymbol{\delta}^{(k)}\|<\varepsilon$ 代替 $\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\|<\varepsilon$ 作为判断迭代终结的条件,并取 $\boldsymbol{u}^{(k+1)}$ 作为方程组(1)的满足精度要求的近似解.然而,我们在使用迭代法求解偏微分方程数值解时,发现用判断公式(6)所得的近似解与精确解比较,误差并不小于 ε(例略).

本文先讨论在系数矩阵严格对角占优的情况下,Jacobi 迭代的误差检验,然后对求解偏微

* 本文 1993-11-06 收到

分方程数值解的 SOR 迭代法推导出误差检验公式,并就实际例子给出实用检验公式.

1 矩阵 A 严格对角占优的情况

使用分裂法进行迭代求解,对于分裂 $A=M-N$,建立迭代格式

$$u^{(k+1)} = G u^{(k)} + d,\ (G = M^{-1}N,\ d = M^{-1}b). \tag{7}$$

当迭代收敛时,得

$$\bar{u} = G\bar{u} + d\ , \tag{8}$$

由式(7),(8)可得

$$\begin{aligned}\delta^{(k)} &= u^{(k+1)} - u^{(k)} = G u^{(k)} + d - u^{(k)}\\ &= (G - I)u^{(k)} + (I - G)\bar{u} = (G - I)\varepsilon^{(k)},\ \text{即}\end{aligned}$$

$$\varepsilon^{(k)} = (G - I)^{-1}\delta^{(k)}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(G - I)^{-1} &= (M^{-1}N - I)^{-1} = (M^{-1}(N - M))^{-1}\\ &= (- M^{-1}A)^{-1} = - A^{-1}M\ .\end{aligned} \tag{10}$$

把(10)代入(9)得

$$\| \varepsilon^{(k)} \| \leqslant \| A^{-1}M \| \cdot \| \delta^{(k)} \|. \tag{13}$$

为了下面讨论,先列出文[3]中引理.

引理 1 若矩 $X=(x_{i,j})$, $Y=(y_{i,j})$均为 $n\times n$ 阶方阵,X 为严格对角占优阵,则有

$$\| X^{-1}Y \| \leqslant \max_i \frac{|y_{i,i}| + \sum\limits_{j\neq i}|y_{i,j}|}{|x_{i,i}| - \sum\limits_{j\neq i}|x_{i,j}|}. \tag{14}$$

设(1)中矩阵 A 具有严格对角占优,即有

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ i = 1,2,\cdots,n\ .$$

并设 $A=D-L-U=D-B$, 其中 $D=\mathrm{DiagA}$, L 和 U 分别是严格下、上三角矩阵.

Jacobi 迭代方法的误差检验. Jacobi 迭代方法是取 $M=D$, $N=B$ 的一种分裂方法,这时,迭代矩阵 $G=D^{-1}B=J$. 有如下

定理 1 若式(1)中的系数矩阵 $A=(a_{ij})$具有严格对角占优,对给定精度要求 $\varepsilon>0$, Jacobi 迭代的误差检验公式为

$$\frac{\| \delta^{(k)} \|}{1 - \max\limits_i \sum\limits_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}} < \varepsilon, \tag{13}$$

证明 取 $M=D$ 代入式(11),得

$$\| \varepsilon^{(k)} \| \leqslant \| A^{-1}D \| \cdot \| \delta^{(k)} \|.$$

再由引理 1,取 A, D 代入 X, Y 得

$$\| \varepsilon^{(k)} \| \leqslant \max_i \frac{|a_{ij}|}{|a_{ij}| - \sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|} \cdot \| \delta^{(k)} \|. \tag{14}$$

$a_{ij}\neq 0$, 由式(14)即可得出(13)

这样当迭代过程满足(13)时,误差检验确保精确度的要求,即有 $\| \varepsilon^{(k)} \| < \varepsilon$.

在式(1)中系数矩阵 A 严格对角占优的情况,应用分裂法 $A=M-N$,建立迭代格式(7),

利用式(11)和引理 1 可以推导其他迭代法，例如 SOR 迭代法、SSOR 迭代法等，类似(13)的误差检验公式．

2　用迭代法求偏微分方程数值解的误差检验

设式(1)中系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} D_{n_1} & C_{n_1} & & & \\ A_{n_2} & D_{n_2} & C_{n_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & C_{n_{m-1}} \\ & & & A_{n_m} & D_{n_m} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

此外

$$D_{n_i}=\begin{bmatrix} 1 & -\alpha & & & \\ -\beta & 1 & -\alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ & & & -\beta & 1 \end{bmatrix},\quad A_{n_i}=\begin{bmatrix} -\gamma & & & \\ & -\gamma & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\gamma \end{bmatrix},$$

$$C_{n_i}=\begin{bmatrix} -\delta & & & \\ & -\delta & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\delta \end{bmatrix},$$

其中 $D_{n_i}, A_{n_i}, C_{n_i}$对应的 i 分别为：$i=1,2,\cdots,m; i=2,3,\cdots,m; i=1,2,\cdots,m-1; \alpha,\beta,\gamma,\delta>1$，$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$.

由文〔2〕知，矩阵 A 的 Jacobi 矩阵 J 具有 N 个线性无关特征向量，且 A 是相容次序矩阵，其相容次序向量为

$$\boldsymbol{r}=(r_i)=(1,2,\cdots,n,2,3,\cdots,n+1,\cdots,n+1,\cdots,2n-1)^{\mathrm{T}}.$$

以矩阵(15)为系数矩阵的方程组，其 Jacobi 迭代和 SOR 迭代矩阵的特征值 μ 和 λ 满足关系

$$(\lambda+\omega-1)^2=\omega^2\mu^2\lambda,$$

且 SOR 迭代矩阵 G_ω 也有 N 个线性无关特征向量，其中 ω 为松驰因子．由此

$$\lambda_i^+,\lambda_i^-=\{[\omega\mu_i\pm\sqrt{\omega^2\mu_i^2-4(\omega-1)}]/2\}^2, \text{其中}(i=1,2,\cdots,s,\ 2s=N). \tag{16}$$

采用 SOR 迭代法求解以矩阵(15)为系数矩阵的方程组是当今较有效的方法，其迭代过程的误差检，我们有

定理 2　设 G_ω 为以矩阵(15)为系数矩阵方程的 SOR 迭代矩阵，且 G_ω 的谱半径为 $\rho(G_\omega)=\lambda_1$，$0<\lambda_1<1$，并且 $\omega\leqslant\omega_b=2/(1+\sqrt{1-\mu_i^2})$，$(i=1,2,\cdots,N)$则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\|}{\|\boldsymbol{\delta}^{(k)}\|}=\frac{1}{1-\lambda_1}. \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=u^{(k)}-u$ 为误差向量，$\boldsymbol{\delta}^{(k)}u^{(k+1)}-u^{(k)}$为残余向量．

证明由(16)式和定理条件，设G_ω的特征值为：

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N. \tag{18}$$

其相应N个线性无关特征向量为$v_i(i=1,2,\cdots,N)$

$$G_\omega v_i = \lambda_i v_i \qquad (i = 1,2,\cdots,N). \tag{19}$$

将初始残余向量$\delta^{(0)}$在$\{v_i\}$上展开

$$\delta^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i. \tag{20}$$

于是有

$$\delta^{(k)} = G_\omega^{(k)} \delta^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i^k v_i. \tag{21}$$

即

$$\delta^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \sum_{i=2}^{N} \alpha_i \lambda_i^k v_i. \tag{22}$$

$$\lambda_1^k \alpha_1 v_1 = \delta^{(k)} - \sum_{i=2}^{N} \alpha_i \lambda_i^k v_i. \tag{23}$$

由式(9)得

$$\varepsilon^{(k)} = (G - I)^{-1} \delta^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1 - 1} \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{\lambda_i^k}{\lambda_i - 1} \alpha_i v_i. \tag{24}$$

将(23)代入(24)有

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)} &= \frac{\delta^{(k)}}{\lambda_1 - 1} + \sum_{i=2}^{N} \left(\frac{\lambda_i^k}{\lambda_i - 1} - \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1 - 1} \right) \alpha_i v_i \\ &= \frac{\delta^{(k)}}{\lambda_1 - 1} + \sum_{i=2} \frac{(\lambda_1 - \lambda_i) \lambda_i^k}{(\lambda_i - 1)(\lambda_1 - 1)} \alpha_i v_i. \end{aligned} \tag{25}$$

由于 $\left|\frac{\lambda_1 - \lambda_i}{1 - \lambda_i}\right| < 1$ 则有

$$\| \varepsilon^{(k)} \| \leqslant \frac{1}{1 - \lambda_1} \left(\| \delta^{(k)} \| + \sum_{i=2}^{N} |\lambda_i^k| \, \| \alpha_i v_i \| \right). \tag{26}$$

设λ_2是G_ω次大的特征值，于是有

$$|\lambda_i/\lambda_2| \leqslant 1 \quad (i = 3,\cdots,N). \text{ 并设}$$

$$C = \sum_{i=2}^{N} \| \alpha_i v_i \| / \| \alpha_i v_i \| . \tag{27}$$

式(26)便可写为

$$\begin{aligned} \| \varepsilon^{(k)} \| &\leqslant \frac{1}{1 - \lambda_1} \left(\| \delta^{(k)} \| + |\lambda_2|^k \| \alpha_i v_i \| \sum_{i=2}^{N} \left(|\lambda_i/\lambda_2| \frac{\| \alpha_i v_i \|}{\| \alpha_i v_1 \|} \right) \right. \\ &\leqslant \frac{1}{1 - \lambda_1} \left(\| \delta^{(k)} \| + C |\lambda_2|^k \| \alpha_i v_1 \| \right). \end{aligned} \tag{28}$$

另由式(22)

$$\begin{aligned} \| \delta^{(k)} \| &\geqslant |\lambda_1|^k \| \alpha_1 v_1 \| - \sum_{i=2}^{N} |\lambda_i|^k \| \alpha_i v_i \| \\ &\geqslant |\lambda_1|^k \| \alpha_1 v_1 \| \cdot (1 - |\lambda_2/\lambda_1|^k C). \end{aligned} \tag{29}$$

当k充分大时，必有$|\lambda_2/\lambda_1|^k C < 1$，把式(29)改写为

$$|\lambda_1|^k \| \alpha_1 v_1 \| \leqslant \| \delta^{(k)} \| / (1 - |\lambda_2/\lambda_1|^k C). \tag{30}$$

将(30)代入(28)得

$$\| \varepsilon^{(k)} \| \leqslant \frac{1}{1-\lambda_1}(\| \delta^{(k)} \| + C | \frac{\lambda_2}{\lambda_1} | \cdot \| \delta^{(k)} \| /(1 - | \frac{\lambda_2}{\lambda_1} |^k \cdot C),$$

即

$$\frac{\| \varepsilon^{(k)} \|}{\| \delta^{(k)} \|} \leqslant \frac{1}{1-\lambda_1}(1 + C|\lambda_2/\lambda_1|^k/(1 - C|\lambda_2/\lambda_1|^k) . \tag{31}$$

故有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| \varepsilon^{(k)} \|}{\| \delta^{(k)} \|} \leqslant \frac{1}{1-\lambda_1}. \tag{32}$$

另一方面，由式(25)

$$\begin{aligned} \| \varepsilon^{(k)} \| &\geqslant \frac{1}{1-\lambda_1}(\| \delta^{(k)} \| - \sum_{i=2}^{N} |\lambda_i|^k \| \alpha_i v_i \| \\ &\geqslant \frac{1}{1-\lambda_1}(\| \delta^{(k)} \| - \sum_{i=2}^{N} |\lambda_2|^k \| \alpha_i v_i \| \\ &\geqslant \frac{1}{1-\lambda_1}(\| \delta^{(k)} \| - |\lambda_2|^k \| \alpha_i v_i \| \cdot C), \end{aligned}$$

即有

$$\| \varepsilon^{(k)} \| \geqslant \frac{1}{1-\lambda_1}(\| \delta^{(k)} \| - C|\lambda_i|^k \cdot \| \alpha_i v_i \| \cdot |\lambda_2/\lambda_1|^k). \tag{33}$$

由(30)和(33)可得

$$\begin{aligned} \| \varepsilon^{(k)} \| &\geqslant \frac{1}{1-\lambda_1}(\| \delta^{(k)} \| - C|\lambda_2/\lambda_1|^k \cdot \| \delta^{(k)} \| /(1 - C|\lambda_2/\lambda_1|^k) \\ &= \frac{\| \delta^{(k)} \|}{|1-\lambda_1|}(1 - C|\lambda_2/\lambda_1|^k/(1 - C|\lambda_2/\lambda_1|^k) . \end{aligned}$$

则是

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| \varepsilon^{(k)} \|}{\| \delta^{(k)} \|} \geqslant \frac{1}{1-\lambda_1}. \tag{34}$$

联合式(32)和式(34)即得式(17)．证毕．

由定理 2，可得

定理 3　在定理 2 条件下，对给定精确度要求 $\varepsilon>0$，SOR 迭代过程的误差检验公式，当 k 充分大时，为

$$\frac{\| \delta^{(k)} \|}{1-\rho(G_\omega)} < \varepsilon , \tag{35}$$

对于用定理 3 来作为迭代过程的误差检验关键在于求出迭代矩阵 G_ω 的谱半径 $\rho(G_\omega)$，这一般是难以求出的．我们这里就某些迭代讨论．一如既往，我们也用单位正方形 $0\leqslant x$，$y\leqslant 1$ 是二阶 Laplace 方程或 Poisson 方程的第一边值问题的标准五点差分格式，所得的代数方程组来讨论．设 x，y 方向均取 $n+1$ 个等距网格，则内网格共有 n^2 个，所得到线性代数方程组 $A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{b}$

容易验证系数矩阵 A 为相容次序矩阵，并且 Jacobi 迭代矩阵和 SOR 迭代矩阵的特征值具有(16)的关系式[4]，并且有

$$\rho(J) \backsimeq 1 - \frac{1}{2}\pi h^2. \tag{36}$$

$$\rho(B\,J) \backsimeq 1 - \pi^2 h^2. \tag{37}$$

其中，$h=1/(n+1)$，$\rho(J)$、$\rho(B\,J)$分别为 Jacobi 迭代块 Jacobi 迭代矩阵的谱半径，而且具有

最佳松驰因子 ω_b 的 SOR 迭代和块 SOR 迭代矩阵的谱半径为

$$\rho(G_\omega) = \rho^2(J/[1 + (1 - \rho^2(J))^{1/2}]^2. \tag{38}$$

$$\rho(BG_\omega) = \rho^2(BJ)/[1 + (1 - \rho^2(BJ))^{1/2}]^2. \tag{39}$$

当取 $\omega_b \cong 2(1-\pi h)$ 时

$$\rho(G_\omega) \cong 1 - 2\pi h\ . \tag{40}$$

若取 $\omega_b \cong 2(1-\sqrt{2}\pi h)$ 时

$$\rho(BG_\omega) \cong 1 - 2\sqrt{2}h\ . \tag{41}$$

这样由式(35)可得 SOR 迭代的误差检验公式为

$$\frac{1}{2\pi h}\|\delta^{(k)}\| < \varepsilon\ . \tag{42}$$

容易证明 BSOR 迭代矩阵的特征值入和 BJ 的特征值 μ 之间也成立关系式(16). 因此定理 3 也适应于 BSOR 迭代过程的误差检验. 即迭代过程的误差检验公式为

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi h}\|\delta^{(k)}\| < \varepsilon\ . \tag{43}$$

参考文献

1 邓建中. 计算方法. 西安:西安交通大学出版社,1985. 204~207

2 蔡大用,施妙根译,实用迭代法. 北京:清华大学出版社,1984. 262~286

3 胡家赣,王邦荣. 严格对角优势矩阵的 PE 法收敛性. 数值计算与计算机应用,1986. (4):206~217

4 胡家赣. 线性代数方程组的迭代解法. 北京:科学出版社,1991. 106~114

Error Checking of Iteration Method for a Class of Matrices

Wang Ziding

(Dept. of Manag. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract In solving system of linear algebraic equation with iteration method, the error checking is discussed. And examples of error checking on numerical solution of paradifferential equation by iteration method is given as well.

Keywords matrix, iteration method, error checking