第15卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 15 No. 2
1994年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 1994

具有递阶结构的多目标群决策方法*

夏洪胜 任海英

(厦门大学系统科学系，厦门 361005)

摘要 建立了一类上层单目标、下层多人无关联多目标的两层决策问题的数学模型，利用加权法把下层的多目标转化为单目标，形成一个下层多人无关联单目标的两层规划问题，采用外部逼近法解两层规划问题，从而获得原两层决策问题的最优解．该法为两层决策问题提供了一种求解途径．

关键词 两层决策，多目标，外部逼近法

分类号 O 225；C 934

在社会组织结构中，两层决策问题有着广泛的实际背景．例如，在制定国民经济发展政策时，中央决策层和各省市决策层就构成了一种两层决策问题，中央决策层从全国的经济发展考虑，设立一个总体目标．对于这种问题，下级决策层即省市决策层考虑的因素比较单一，具体，需要优化的目标常常有多个目标．其决策过程是，首先由上级决策层宣布其决策给省市决策层，省市决策层根据本省市的情况，对上级决策层的决策作出反应，这就构成了一个两层决策系统．其它的例子还很多，如资源分配、农田灌溉等等．目前，单层多目标决策问题的研究较多，而两层多目标决策问题的研究较少[1,2]，但已逐步引起了人们的重视[3~5]．本文的研究是针对一类具有如下特点的两层多目标决策问题．(1)上层为一单目标决策问题，下层为一多目标优化问题，上、下层决策人各自控制着自身的决策变量．(2)上层决策人较下层决策人有更大的权力和利益，下层决策人在满足自身需求的情况下，必须充分满足上层决策人的利益．(3)最终所求得的两层决策问题的最优解应该是上层决策人满意的，同时也是下层决策人可接受的．(4)决策过程是按照自上而下的顺序进行的．对这类问题的研究，单靠优化方法是不够的，必须利用对策论的有关知识．

1 数学模型的建立

根据该类问题的特点，建立的两层决策问题的数学模型如下：

$$\text{(N)}\quad \max_x F_0(x,y)=\max_x(f_{01}(x,y_1,y_2,\cdots,y_p)),\tag{1}$$

且 y 解

$$\max_{y_i} F_1^{(i)}(x,y_i)=\max_{y_i}(f_{11}^{(i)}(x,y_i),f_{12}^{(i)}(x,y_i),\cdots,f_{1N_i}(x,y_i)),\tag{2}$$

* 本文 993-11-04 收到；国家自然科学基金资助项目

$$s.t.\quad h_j^{(i)}(x,y)\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,t_i,\quad i=1,2,\cdots,p.$$

其中:x, F_0 分别为上层的决策变量、目标函数;y, F_1 分别为下层的决策变量、目标函数.

$$G=\{(x,y)\mid h_j^{(i)}(x,y)\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,t_i\ i=1,2,\cdots,p\},\ D_0=\{x\mid(x,y)\in G\},$$

$$E_0=\{y_i\mid(x,y)\in G\},\ x\in R^{n_0},\ y_i\in R^{n_i},\ F_0\in R^{n_0},\ F_i\in R^{n_i}.$$

G 为凸集,F_0,F_1 均为凹函数,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_p)$.

模型(N)的上层有一个决策人,称之为 UDM;下层有 p 个决策人,称之为 LDM,UDM 有单个目标函数,LDM 有多个目标函数.模型(N)的决策机制为,上、下层决策人之间采取正向 Stackelberg 主从策略[6],UDM 为主方,LDM 为从方.在决策过程中,主方 UDM 首先宣布其策略,然后从方 LDM_i 以这种策略作为自己的约束,对自身的目标进行优化,从而确定自身的策略.上、下层决策人按照自上而下的顺序宣布其策略称为正向的;主从的含义为:UDM 较 LDM_i 有更大的权力,LDM_i 在满足自身基本需求的情况下,必须服从于 UDM,使 UDM 的利益得到充分保证.

模型(N)的解的定义如下:

定义 1　若对于 UDM 给定的 $x\in D_0$,下层决策变量 $y_i(y_i\in E_0)$为 LDM 对应于 x 的非劣解,则称(x,y)为模型(N)的可行解.

定义 2　若(x,y)为模型(N)的可行解,且无其它可行解$(\bar{x},\bar{y})$,使得 $f_{01}(\bar{x},\bar{y})\geqslant f_{01}(x,y)$,则称$(x,y)$为模型(N)的最优解.

对于两层决策问题的求解,就是要求得上、下层决策人满意的模型(N)的最优解,即模型(N)的最优解.考虑到上、下层决策人之间是主从的关系,最终求得的最优解应充分满足上层决策人的要求,下层决策人可能要牺牲自身的某些利益.

2　两层决策问题转化为单层问题

采用加权法将模型(N)转化为如下形式:

$$\max_x f_{01}(x,y),\tag{3}$$

$$\max_{y_i}\sum_{q=1}^{N_i}W_1^{(i)}f_{1q}^{(i)}(x,y_i)\quad(i=1,\cdots,p),\tag{4}$$

$$s.t.\ (x,y)\in G\tag{5}$$

其中:权系数 $W_q^{(i)}$ 表示各目标的重要程度,其取法可见文〔7〕

令 $f''_{01}(x,y)=f_{01}(x,y)$,$f_{11}^{(i)}(x,y_i)=\sum_{q=1}^{N_i}W_1^{(i)}f_{1q}^{(i)}(x,y_i)$则(3~5)可以转化为如下形式:

$$\max_x f''_{01}(x,y),\tag{6}$$

$$\max_x f_{11}^{(i)}(x,y_i),\quad i=1,\cdots,p,\tag{7}$$

$$s.t.\ (x,y)\in G,\tag{8}$$

将(7)~(8)用其 Kuhn－Tucker 条件代替,则:

$$\max_x f''_{01}(x,y_i),\tag{9}$$

$$\nabla_{y_i}f_{11}^{(i)}(x,y_i)+\sum_{\tau=1}^{t_i}u_\tau^{(i)}\nabla_{y_i}h_\tau^{(i)}(x,y)=0,\tag{10}$$

$$\sum_{\tau=1}^{t_i} u_\tau^{(i)} h_\tau^{(i)}(x,y) = 0, \tag{11}$$

$$u_\tau^{(i)} \geqslant 0, \quad \tau = 1,2,\cdots,t_i; \quad i = 1,2,\cdots,p, \tag{12}$$

$$(x,y) \in G, \tag{13}$$

令 $Z=(x,y,u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_{t_1}^{(i)}\cdots,u_1^{(p)},u_2^{(p)},\cdots,u_{t_p}^{(p)})$，$f'_{01}(x,y)=f''_{01}(x,y)$，用 Ω''表示(10)～(13)组成的约束集，并设 $\Omega''=\{Z\ g_i(Z)\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,l\}$．则(9)～(13)可以转化为：

$$\max_z f'_{01}(Z), \tag{14}$$

$$s.t.\ Z \in \Omega'. \tag{15}$$

显然 Ω'为非凸约束集，必须采用求解非凸约束全局最优解的方法求解(14)～(15)．

3　收敛外部逼近法

收敛外部逼近法可以求解非凸约束优化问题的全局最优解．该方法针对(14)～(15)，令：$g(Z)=\min_{i=1,2,\cdots,l} g_i(Z)$，$G_i=\{Z\in R^m : g_i(Z)<0\}$，$(i=1,2,\cdots,l)$，$G'=\{Z\in R^m : g(Z)<0\}=\bigcup_{i=1}^{l} G_i$，则(14)～(15)转化为求解下式：

$$\min_z f'_{01}(Z) \tag{16}$$

$$s.t.\ Z \in \Omega''(\Omega' \text{为} G' \text{的补集}) \tag{17}$$

收敛外部逼近法基于如下假设：(Ⅰ) $f'_{01}(Z)$在 R^m 上是凸的，有界的，$g_i(Z)$ $(i=1,2,\cdots,l)$是连续的；(Ⅱ) $\bar{\alpha}=\min\{f'_{01}(Z) : g(Z)\geqslant 0\}<+\infty$；(Ⅲ) 存在某一点 W，且 $f'_{01}(W)<\bar{\alpha}$，$g(W)=\min_{i=1,\cdots,l} g_i(W)<0$；(Ⅳ) 对于任意给出的 $C\in R^m$，可以计算出离 W 最近的点 $\pi(C)$，$\pi(C)\in\Omega''$，其中线段$[W,C]$与 G' 的边界 $\partial G'$ 相交，否则，这样的点 $\pi(C)$不存在．

以上假设的两点说明：(1)假设(Ⅲ)可以通过解如下凸规划问题.

$$\min_z\{f'_{01}(Z) : Z \in R^m\}$$

若此凸规划问题的最优解存在且满足 $g(Z)\geqslant 0$，则此解为(16)～(17)的最优解，否则，必须找到满足假设(Ⅲ)条件的点 W；(2) 由于 $g_i(Z)(i=1,2,\cdots,l)$是连续的，则位于线段$[W,C]$上的可行点集是封闭的，此可行点集可不包含点 W，因此，只要此可行点集非空，就一定有一个最接近 W 的点 $\pi(C)$，容易看出，点 $\pi(C)$一定位于 $\partial G'$ 上.

收敛外部逼近法的理论依据：

定理 3.1　若 $f'_{01}(Z)$在 R^m 上是连续，可微的，则：$L'=\{Z : f'_{01}(Z\leqslant\alpha)\}$是紧的，凸的，且对于任意的 V，存在 $f'_{01}(V)>f'_{01}(W)$，则有 $0\notin\partial f'_{01}(V)$.

定理 3.2　对于任意的 C，当且仅当线段$[W,C]$与可行集 R^m/G' 相交，则 $\pi(C)$存在，当 $\pi(C)\neq C$ 时，有 $f'_{01}\pi(C))<f'_{01}(C)$，实际上 $\pi(C)$为线段$[W,C]$上的所有可行点中使 $f'_{01}(Z)$达到最小值的点．

推论　(3)～(4)的所有最优点位于 $\partial G'$ 上(边界可行点)．以上定理的证明见文[8].

下面给出收敛外部逼近法中的一些符号的意义．(1) Z^k：k 次迭代所获得的最好可行解$(Z^k\in\partial G')$．(2) A_k 满足 $f'_{01}(Z)\leqslant f'_{01}(Z)^k$ 的所有可行解 Z．(3) C^k：在 A_k 上使 $f'_{01}(Z)$取最大值的点．(4) Z^{k+1}：若 $\pi(C^k)$存在，Z^{k+1}为 Z^k 和 $\pi(C^k)$中最好的点，若 $\pi(C^k)$不存在，则 $Z^{k+1}=Z^k$.

(5)$\pi(C^{(k)})$：线段〔W,C^k〕上最好的可行点．(6) A_{k+1}：在线段〔W,C^k〕上的一点 $V^{k+1}(f'_{01}(V^{k+1})=f'_{01}(Z^{k+1}))$，从 A_k 中，用一辅助平面对凸集 $\{Z:f'_{01}(Z)\leqslant f'_{01}(Z^{k+1})\}$ 切割掉 C^k.

收敛外部逼近法的步骤如下，

step 0：取 $w\in\arg\min\{f'_{01}(Z):Z\in R^m\}$，其中 arg 表示最小值的反函数，或任意满足假设（Ⅲ）的点 w，取一点 $Z^0\in\partial G'$，建立如下凸多面体 A_0：$\{Z|Z\in W+Q(\partial G'-W),\ f'_{01}(Z)\leqslant f'_{01}(Z^0),Q\geqslant 1\}$.

对于任意 A_0 的一个顶点，c，有 $f'_{01}(C)>f'_{01}(Z^0)$，令 $k=0$.

step 1：检验 Z^0 是否为在 A_k 上的 $f'_{01}(Z)$ 的最小值，若是，则停止，Z^k 为(16)～(17)的全局最优解；否则，转到 step 2.

step 2：解优化问题：$\max\{f'_{01}(Z)|Z\in A_k\}$，令 C^k 为此优化问题的一个最优解．

step 3：计算 $\pi(C^k)$，若此点存在，且 $f'_{01}\pi(C^k))<f'_{01}(Z^k)$，令 $Z^{k+1}=\pi(C^k)$；否则，令 $Z^{k+1}=Z^k$.

step 4：令 V^{k+1} 为线段〔W,C^k〕与平面 $f'_{01}(Z)=f'_{01}(Z^{k+1})$ 相交的点，计算 $Q^{k+1}\in\partial f'_{01}(V^{k+1})$，且令：

$A_{k+1}=\{Z\in A_k:\langle Q^{k+1},\ Z-V^{K+1}\rangle\leqslant 0\}$，置 $k=k+1$，转到 step 1.

4　两层决策问题的算法和算例

本文给出的两层决策问题的算法如下：

step 1：由 $\mathrm{LDM_i}$ 给出其权系数 $W_q^{(i)}(q=1,2,\cdots,\mathrm{N}_i)\ i=1,2,\cdots,p$.

step 2：将模型(N)转化为(14)～(15).

step 3：按节 3 的收敛外部逼近算法求解(14)～(15)．若有解，则该解为两层决策问题的最优解；否则，由 $\mathrm{LDM_i}$ 重新给出权系数．以上过程不断重复，直到获得两层决策问题的最优解．

本文给出的两层决策问题的算例如下：

$$
\begin{aligned}
&\max_x(x^2-y_1+y_1y_2),\\
y_1\ \text{解}\ &\max_{y_i}(y_1^2+xy_1-y_1+x^2),\\
&\max_{y_2}(y_2^2+3xy_2,\ -y_2x),\\
s.t.\quad &4y_1-x\geqslant 0,\\
&2x-y_2\geqslant 0,\\
&x^2y_1-1\geqslant 0,\\
&x^2y_2\geqslant 3,\\
&x,y_1,x_2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

按上述算法对此算例进行运算，可得最优解为$(x,y_1,y_2)=(2.50,\ 2.98,\ 1.00)$.

5　结束语

本文提出的求解两层决策问题的决策方法具有给决策人负担较轻，易于在计算机上实现等特点．目前，在两层决策问题研究较少的情况下，本文的决策方法为该类问题提供了一种求解途径，对进一步研究决策支持系统也是有意义的．

参 考 文 献

1 夏洪胜,盛昭瀚,徐南荣．交互式多目标决策方法综述．系统工程与电子技术,1991,20 (10):51～56
2 夏洪胜,盛昭瀚,徐南荣．多层多目标决策方法的综述．系统工程与电子技术,1992,21(7):27～32
3 夏洪胜,盛昭瀚,徐南荣．一种两层非线性多目标决策方法．控制与决策,1992,7(4):277～282
4 夏洪胜,盛昭瀚,徐南荣．基于Stackelberg主从策略的两层非线性多目标决策方法．东南大学学报,1992, 16(3):125～128
5 夏洪胜．基于置换率和满意度的两层多目标决策问题的交互式算法研究:〔博士论文〕. 南京:东南大学系统工程研究所,1992
6 Bard J F. Convex two-level optimization. Mathematical Programming, 1988, 40(1): 15～17
7 陈 珽. 决策分析. 北京:科学出版社,1987. 0～36
8 Tuy H A, Thuong N V. On the gbobal minimization of a convex function under general nonconvex constraints. Appl. Math. Optimization, 1988, (18):119～142

A Multiple-Objective Group Decision Making Method with Hierarchical Structure

Xia Hongshen　Ren Haiying

(Dept. of Systems Science, Xiamen Univ. , 361005,Xiamen)

Abstract The two-level decision making problem with a single-objective upper level and a several-independent-person, multiple-objective lower level is modelled by a mathematical model; and it is then transferred into a two-level programming problem with a several-independent-person, single-objective lower level by using weighted method to transfer multiple-objective lower level into single-objective one. Thus the problem of two-level decision will have an optimized solution by adopting outer approximation to solve this programming problem. The method provides the problem of two-level decision with a way of solving.

Keywords two-level decision, multiple-objective, outer approximation