第 15 卷 第 1 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 15 No. 2
1994 年 2 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 1994

几何分布场合步加应力寿命试验的贝叶斯分析*

高鹏遐[①]　吴绍敏[②]

（①福建师范大学数学系，福州 50007；②华侨大学管理信息科学系，泉州 362011）

摘要　在几何分布场合下，由步进应力加速寿命试验获得定时和定数截尾试验数据．应用两种方法，给出平均寿命的点估计，并给出平均寿命的量信下限．

关键词　步进应力，加速寿命试验，几何分布，贝叶斯分析

分类号　O 213

高可靠、长寿命的产品要获得其失效数据比较困难，因其试验时间长、花费大，不利于产品的更新换代．因此，人们采用了加大应力寿命试验的方法．步进应力加速寿命试验是一种较新的方法，简称步加应力试验．许多寿命离散型的产品，其寿命服从几何分布，故对几何分布的可靠性统计分析具有实用价值．本文将采用回归法与“次序约束”法，对正常应力下产品平均寿命进行点估计，并给出平均寿命的置信下限．为保证可靠性指标的正确估计，必须合理选择加速应力水平．比如，低应力水平不得高于正常应力水平太多，高应力水平也不能过高，以免失效机理的变化．由此可见，高应力水平的失效数据所提供的寿命信息，不如低应力水平失效数据所提供的寿命信息准确，但在建立回归时却是同等的一员．这样的方程难免影响低应力水平数据的作用．为克服这个缺点，可应用“次序约束”方法，先将低应力水平的寿命信息综合评定出来，尔后建立回归方程，其效果明显改善．但是，有的文章应用“次序约束”法时，忽视如下的事实，即高应力水平的数据隐含有低应力水平的寿命信息，而低应力水平的数据却无法提供高应力水平的寿命信息，因而其分析结果是不正确的．

1　假定与引理

不同的物理试验模型，数据的处理方法不同．步加应力试验数据的处理方法是基于下列三个基本假定．

假定 I　在正常应力水平 s_0 和加速应力水平 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ $(s_0 < s_1 < \cdots < s_m)$ 下，产品的寿命均服从几何分布．在应力水平 s_i 下产品寿命分布为 $G(q_i)$．即

$$P(X = x) = q_i p_i^{x-1} (p_i + q_i = 1; x = 1, 2, \cdots) \quad 或$$

* 本文 1993-08-06 收到

$$F_i(t) = 1 - p_i^t (t = 1,2,\cdots; i = 1,m), \tag{1}$$

其中 $q_i>0$ 为失效率,$\theta_i=1/q_i$ 为平均寿命.

假定 I 产品的平均寿命 θ 与所加应力水平 s 之间有如下关系:

$$\theta = \exp\{a + b\varphi(s)\} \text{ 或 } \ln\theta = a + b\varphi(s), \tag{2}$$

其中 a,b 为末知参数,$\varphi(s)$ 为应力水平 s 的已知函数.当应力水平 s 是温度时,模型(2)为阿伦尼斯模型,当应力 s 为电压时,模型(2)为逆幂律模型.

假定 II 产品的剩余寿命仅依赖于当时已累积的失效部分和当时的应力条件,而与累积方式无关.也就是说,如果产品的寿命分布为 $F(t)$,在应力 s_j 下工作 t_i 时间的累积失效概率,等于在 s_j 下工作到 t_j 时间的累积失效概率即 $F_{s_j}(t_j)=F_{s_i}(t_i)$,$(i,j=\overline{1,m})$.由假定 I 有 $1-p_i^{t_i}=1-p_j^{t_j}$ 或 $p_i^{t_i}=p_j^{t_j}$,但当 t_j,t_i 为正整数时此式不完全正确,即在几何分布场合假定 II 不完全成立.但由 $t_j=\frac{\ln p_i}{\ln p_j}t_i$ 且 t_i 为正整时,取

$$t_j = “(\frac{\ln p_i}{\ln p_j})t_i” \text{(“”表示先变换后四舍五入,下同)}, \tag{3}$$

则 $F_{s_j}(t_j)\doteq F_{s_i}(t_i)$,误差为小于或等于 $\frac{1}{2}p_i^{t_i}(p_j^{-0.5}-p_j^{0.5})$,很小.应用式(3)可对步加试验数据进行析算.

引理 1 设产品寿命为 $X\sim G(q)$,若 t_i 是产品在应力 s_i 下的失效时间,那么 $t_j=“(\frac{\ln p_i}{\ln p_j})t_i”$ 是产品在应力 s_j 下的失效时间.则

$$P_j(X = t_j) \doteq \frac{q_j p_i}{p_j q_i} P_i(X = t_i). \tag{4}$$

证 $P_j(X=t_j)=P_j(X=“\frac{\ln p_i}{\ln p_j}t_i”)\doteq q_j p_j^{\frac{\ln p_i}{\ln p_j}t_i-1}=q_j p_j^{-1} p_i^{t_i}=\frac{q_j p_i}{p_j q_i}P_i(X=t_i).$

利用(4)可进行各应力水平间的概率折算,其中 $(\frac{q_j p_i}{p_j q_i})$ 为“放大”系数.

引理 2 产品寿命 $X\sim G(q)$,从一批产品中随机抽取 n 个作步加寿命试验.在 s_i 水平下试验到 T_i^* 时刻,有 r_i 个失效,其失效时间为 $t_{i1},t_{12},\cdots,t_{ir_i}$;余下 $(n-R_i)$ 个末失效,立即提高应力水平继续试验.其中 $R_i=\sum_{j=1}^{i} r_j$,记 $T_i=\sum_{j=1}^{r_i}(t_{ij}-1)+(n-R_i)T_i^*$ 为试验总时间,定时截尾试验时,T_i^* 为截尾时间,定数截尾试验时,$T_i^*=t_{ir_i}(i=1,m)$,则 s_i 上的似然函数近似地有

$$L(r_i,T_i,q_i) \doteq \frac{(n - R_{i-1})!}{(n - R_i)!} q_i^{r_i} p_i^{T_i}, \quad R_0 = 0,(i = 1,m). \tag{5}$$

证 当 $m=3$ 时,证其成立.记各应力水平上的试验数据为 $s_1:t_{11},t_{12},t_{13}\cdots,t_{r_1},T_1^*$;$s_2:t_{21},t_{22}\cdots,t_{r_2},T_2^*$;$s_3:t_{31},t_{32}\cdots,t_{r_3},T_3^*$ 由式(3)将 s_2,s_3 上的数据折算为 s_1 上的数据:$t_{r_{1+1}}=T_1^*+“\frac{\ln p_2}{\ln p_1}t_{21}”$,$t_{1r1+2}=T_1^*+“\frac{\ln p_2}{\ln p_1}t_{22}”$,$\cdots$,$t_{1r_1+r_2}=T_1^*+“\frac{\ln p_2}{\ln p_1}t_{2r_2}”$;$t_{1r_1+r_2+1}=T_1^*+“\frac{\ln p_2}{\ln p_1}t_{21}T_2^*”+“\frac{\ln p_3}{\ln p_1}t_{31}”$,$t_{1r_1+r_2+2}=T_1^*+“\frac{\ln p_2}{\ln p_1}T_2^*”+“\frac{\ln p_3}{\ln p_1}t_{31}”$,$\cdots$,$t_{1r_1+r_2+r_3}=T_1^*+“\frac{\ln p_2}{\ln p_1}T_2^*”+“\frac{\ln p_3}{\ln p_1}t_{3r_3}”$.那么,$t_{1j}(j=1,r_1+r_2+r_3)$ 为 $G(q_1)$ 的前 $(r_1+r_2+r_3)$ 个顺序统计量,$T=T_1^*+“\frac{\ln p_2}{\ln p_1}T_2^*”+“\frac{\ln p_3}{\ln p_1}$

T_3^*"为试验截尾时间．故

$$L(t_{11},t_{12},\cdots,t_{1r_1};t_{1r_1+1},t_{1r_1+2},\cdots,t_{1r_1+r_2};t_{1r_1+r_2+1},\cdots,t_{1r_1+r_2+r_3};q_1T)$$
$$=\frac{n!}{(n-r_1-r_2-r_3)!}\prod_{j=1}^{r_1+r_2+r_3}P_1(X=t_{1j})p_1^{(n-r_1-r_2-r_3)T}.$$

再应用引理 1,将 s_1 上的概率折算为 s_2 与 s_3 的概率,则得

$$L(r_1,T_1,q_1;r_2,T_2,q_2;r_3,T_3,q_3)\doteq\frac{n!}{(n-r_1-r_2-r_3)!}\prod_{j=1}^{r_1}P_1(X=t_{1j})$$
$$\prod_{j=r_1+1}^{r_1+r_2}(\frac{q_2p_1}{p_2q_1})P_1(X=t_{1j})\prod_{j=r_1+r_2+1}^{r_1+r_2+r_3}(\frac{q_3p_1}{p_3q_1})p_1(X=t_{1j})P_1^{(n-r_1-r_2-r_3)T}.$$

再去掉四舍五入的符号,经整理即得

$$L(r_1,T_1,q_1;r_2,T_2,q_2;r_3,T_3,q_3)\doteq\frac{n!}{(n-r_1)!}q_1^{r_1}p_1^{T_1}\frac{(n-r_1)!}{(n-r_1-r_2)!}q_2^{r_2}p_2^{T_2}$$
$$\frac{(n-r_1-r_2)!}{(n-r_1-r_2-r_3)!}q_3^{r_3}p_3^{T_3}.$$

即得式(5)成立．证毕．

2　贝叶斯估计

由引理 2 知 $L(r_i,T_i,q_i)\doteq\frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!}q_i^{r_i}p_i^{T_i}(i=1,m)$. 取 q_i 的无信息验前分布 $\Pi(q_i)=q_i^{-1}(1-q_i)^{-1}$,得 q_i 的后验密度函数为

$$f(q_i,|r_i,T_i)\doteq\frac{q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}}{\int_0^1 q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i}=\frac{1}{\mathrm{B}(r_i,T_i)}q_i^{r_i-1}(1-q_i^{T_i-1}).\tag{6}$$

在二次损失下,得 q_i 的贝叶斯估计．

$$\hat{q}_i\doteq\mathrm{E}(q_i|r_i,T_i)=\frac{1}{\mathrm{B}(r_i,T_i)}\int_0^1 q_i^{r_i}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i=\frac{\mathrm{B}(r_i+1,T_i)}{\mathrm{B}(r_i,T_i)}$$
$$=\frac{r_i}{T_i+r_i}=\frac{r_i}{\tau_i}\qquad\tau_i\triangleq\sum_{j=1}^{r_i}t_{ij}+(n-R_i)T_i^*.$$

得平均寿命 θ_i 的贝叶斯估计

$$\hat{\theta}_i\doteq\frac{\tau_i}{r_i}\ (i=1,m).\tag{7}$$

给定置信水平 $\alpha(0<\alpha<1)$,则 $1-\alpha=p(q\leqslant q_u)\doteq\frac{1}{\mathrm{B}(r)}\int_0^{q_u}x^{r-1}(1-x)^{T-1}\mathrm{d}x$. 记 $s(q_u)=\frac{1}{\mathrm{B}(r)}\int_0^{q_u}x^{r-1}(1-x)^{T-1}\mathrm{d}x$,令 $x=f_1y/(f_2+f_1y)$,$f_1=2r$,$f_2=2T=2(\tau-r)$,$f_1/2=r$,$f_2/2=(\tau-r)$,$\mathrm{d}x=f_1f_2dy/(f_2+f_1y)^2$. 则

$$\mathrm{S}(q_n)=\frac{\Gamma((f_1+f_1)/2)}{\Gamma(f_1/2)r(f_2/2)}\int_0^{f_2q_u/f_1(1-q_u)}(\frac{f_1y}{f_2+f_1y})^{r-1}(1-\frac{f_1y}{f_2+f_1y})^{T-1}\frac{f_1f_2}{(f_2+f_1y)}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{f_2q_u/f_1(1-q_u)}f(y,f_1f_2)\mathrm{d}y=1-\alpha$$

其中 $f(y,f_1,f_2)=\Gamma((f_1+f_2)/2)/f_1^{f_1/2}f_2^{f_2/2}y^{f_2/2-1}(f_2+f_1y)^{-(f_1+f_2)/2}(y>0)$是第一自由度为

f_1,第二自由度为 f_2 的 F-分布密度函数．由此可知 $F_a(f_1,f_2)\doteq f_2q_u/f_1(1-q_u)$,解得 $q_u\doteq 1/(1+\dfrac{f_2}{f_2F_a(f_1,f_2)})$．即得平均寿命 θ 的 $(1-\alpha)$ 置后下限估计为

$$\hat{\theta}_L(\alpha)\doteq 1+f_2/f_1F_a(f_1,f_2)=1+(\tau-r)/F_2(2r,2(\tau-r_1)). \tag{8}$$

方法 1 由式(9)有 $\hat{\theta}_i=\tau_i/r_i$,令 $\eta_i=\ln\hat{\theta}_i$,$\varphi_i=\varphi(s_i)(i=\overline{1,m})$．由数据 (φ_i,η_i),$(i=\overline{1,m})$ 应用最小二乘法可建立方程为

$$\left.\begin{aligned}&\ln\hat{\theta}=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\quad \text{或}\quad \hat{\theta}=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\},\\&\hat{a}=\overline{\ln\theta}-\hat{b}\bar{\varphi},\hat{b}=[\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\ln\hat{\theta}_i-m\bar{\varphi}\,\overline{\ln\theta}]/(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2-m\bar{\varphi}^2),\\&\bar{\varphi}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i,\quad \overline{\ln\theta}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln\hat{\theta}_i.\end{aligned}\right\}$$

由数组 $(\varphi_i,\ln\hat{\theta}_{iL}(\alpha))$,$(i=\overline{1,m})$ 可建立回归方程为

$$\ln\hat{\theta}_L(\alpha)=\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\quad \text{或}\quad \hat{\theta}_L(\alpha)=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\}.$$

那么对正常应力 s_0 与 α,即可得 θ_0 与 $\theta_{0L}(\alpha)$ 的估计值为

$$\hat{\theta}_0=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)\}\quad \text{和}\quad \hat{\theta}_{0L}(\alpha)=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s_0)\}.$$

方法 2 由假定 I 有 $s_1<s_2<\cdots<s_m$,决定了 $q_1<q_2<\cdots<q_m$．记 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$,$T=(T_1,T_2,\cdots,T_m)$,$q=(q_1,q_2,\cdots,q_m)$．由引理 2 知

$$L(r,T,q)\doteq\prod_{i=1}^{m}q_i^{r_i}(1-q_i)^{T_i},$$

把 q_i 看作 r,v,取其无信息验前分布 $\Pi(q_1)=q_1^{-1}(1-q_i)^{-1}$．则

$$f(q|r,T)\doteq\prod_{i=1}^{m}q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\Big/\int_D\prod_{i=1}^{m}q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i,$$

$$D=\{q:q_1<q_2<\cdots<q_m\}, \tag{10}$$

记 $w_m^*=\int_D\prod_{i=1}^{m}q_i^{r_i-1}(1-q_i)^{T_i-1}\mathrm{d}q_i,\ r_i\geqslant 1(i=\overline{1,m})$

定理 1

$$f(q|r,T)\doteq w_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}w(j_mj_{m-1}\cdots j_2)\mathrm{B}(q_1|r_1+g_2-j_2,,T_1+j_1), \tag{11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&g_m=T_m+r_m-1,g_i=T_i+r_i+g_{i+1}-1\ (i=\overline{1,m-1}),\\&C_{j_i}=\binom{g_i}{j_i}\mathrm{B}(T_{i-1}+j_i,r_{i-1}+g_i-j_i)\ (i=\overline{2,m}),\\&w(j_mj_{m-1}\cdots j_2)=\prod_{i=m}^{2}C_{ji},\\&w_m=\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}w(j_m,j_{m-1},\cdots,j_2).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

证明 当 $m=4$ 时成立,由式(10)得

$$f(q_1|r,T)\doteq w^{*-1}\{q_1^{r_1-1}(1-q_1)^{T_1-1}\int_{q_1}^{1}q_2^{r_2-1}(1-q_2)^{T_2-1}\mathrm{d}q_2$$

$$\int_{q_2}^{1} q_3^{r_3-1}(1-q_1)^{T_3-1}\mathrm{d}q_3\int_{q_3}^{1} q_4^{r_4-1}(1-q_1)^{T_4-1}\mathrm{d}q_4\}.$$

重复应用恒等式

$$\int_{q}^{1} x^{r-1}(1-x)^{T-1}\mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{B}(T,r)\sum_{j=T}^{r+T-1}\binom{r+T-1}{j}q^{r+T-1-j}(1-q)^{j}(r,T\text{ 为正整数}). \tag{13}$$

得

$$I_4=\int_{q_3}^{1} q_4^{r_4-1}(1-q_4)^{T_4-1}\mathrm{d}q_4=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}q_3^{(g_4-j_4)}(1-q_3)^{j_4},$$

$$I_3=\int_{q_2}^{1} q_3^{r_3-1}(1-q_3)^{T_3-1}I_4\mathrm{d}q_3=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_m}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\int_{q_2}^{1} q_3^{r_3+g_4-1-j_4}(1-q_3)^{T_3+j_4-1}\mathrm{d}q_3,$$

$$I_2=\int_{q_1}^{1} q_2^{r_2-1}(1-q_2)^{T_2-1}I_3\mathrm{d}q_2=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\mathrm{B}(T_3+j_4,r_3+g_4-j_4)$$
$$\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\binom{g_3}{j_3}\int_{q_1}^{1} q_2^{r_2+g_3-1-j_3}(1-q_2)^{T_2+j_3-1}\mathrm{d}q_2,$$
$$=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\mathrm{B}(T_3+j_4,r_3+g_4-j_4)\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\binom{g_3}{j_3}\mathrm{B}(T_2+j_3,r_2+g_3-j_3)$$
$$\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}\binom{g_2}{j_2}q_1^{g_2-j_2}(1-q_1)^{j_2},$$

$$I_1=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\binom{g_4}{j_4}\mathrm{B}(T_3+j_4,r_3+g_4-j_4)\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\binom{g_3}{j_3}\mathrm{B}(T_2+j_3,r_2+g_3-j_3)$$
$$\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}\binom{g_2}{j_2}q_1^{r_1+g_2-1-j_2}(1-q_1)^{T_1+j_2-1}$$
$$=\mathrm{B}(T_4,r_4)\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\sum_{j_3=T_{33}+j_4}^{g_3}\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}(c_{j_4}c_{j_3}c_{j_2})\mathrm{B}(q_1|r_1+g_2-j_2,T_1+j_2).$$

由于 $f(q_1|r,T)\doteq I_1/w_4^*$，$\int_0^1(q_1|r,T)\mathrm{d}q_1=1$，得 $w^*\doteq\mathrm{B}(\tau_4r_4)w_4$. 故有

$$f(q_1|r,T)\doteq w_4^{-1}\sum_{j_4=T_4}^{g_4}\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3}\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}w(j_4j_3j_2)\mathrm{B}(q_1|r_1+g_2-j_2,T_1+j_2).$$

证毕．同理可证一般的情形．

推论 1　在二次损失下 q_1 的贝叶斯估计为

$$\hat{q}_1\doteq w_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_m+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}w(j_mj_{m-1}j_2)\left(\frac{r_1+g_2-j_2}{r_1+T_1+g_2}\right), \tag{14}$$

因为低应力水平的数据无法提供高应力水平的寿命信息;反之,高应力水平的数据隐含低应力水平的寿命信息,故估计 q_2 时 (r_1T_1) 不起作用．易得

推论 2　应用 $s_2<s_3<\cdots<s_m$ 与 $q_2<q_3<\cdots<q_m$，可得

$$f(q_2|r,T)\doteq w_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_2=T_2+j_3}^{g_2}w(j_mj_{m-1}\cdots j_3)\mathrm{B}(q_2|r_2+g_3-j_3,T_2+j_3). \tag{15}$$

在二次损失下,q_2 的贝叶斯估计为

$$\hat{q}_2 \doteq w_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3} w(j_m j_{m-1}\cdots j_3)\left(\frac{r_2+g_3-j_3}{r_2+T_2+g_3}\right), \tag{16}$$

其中 $w_m=\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_3=T_3+j_4}^{g_3} w(j_m j_{m-1}\cdots j_2)$. 一般的

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{q}_m \doteq w_m^{-1}\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_{k+1}=T_{k+1}+j_{k+2}}^{g_{k+1}} w(j_m j_{m-1}\cdots j_{k+1})\left(\frac{r_k+g_{k+1}-j_{k+1}}{r_k+T_k+g_{k+1}}\right),\\
&w_m=\sum_{j_m=T_m}^{g_m}\sum_{j_{m-1}=T_{m-1}+j_m}^{g_{m-1}}\cdots\sum_{j_{k+1}=T_{k+1}+j_{k+2}}^{g_{k+1}} w(j_m j_{m-1} j_{k+1}),(k=1,m-1),\\
&\hat{q}_1 \doteq r_m/T_m.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

则应力水平 s_i 上的平均寿命估计值为 $\hat{\theta}_i=1/\hat{q}_i$. 令 $\eta_i=\ln\hat{\theta}_i(i=\overline{1,m})$,利用数据$(\varphi_i,\eta_i)(i=\overline{1,m})$可建立预测方程 $\hat{\theta}=\exp\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(s)\}$,显然它与方法 1 建立的方程是有区别的.

实例

取四个加速温度水平为 $s_1=463$K,$s_2=493$K,$s_3=513$K 和 $s_4=533$K,加速模型为阿伦尼斯方程即 $\varphi(s)=(k_0 s)^{-1}$,$k_0=0.8617\times10^{-4}$eV·K^{-1}. 可算得 $\varphi_1=25.0647$,$\varphi_2=23.5595$,$\varphi_3=22.6218$ 和 $\varphi_4=21.7729$. 取加速方程中的 $a=-18$,$b=1$,即 $\theta_1=1170$,$\theta_2=225$,$\theta_3=102$,$\theta_4=44$,正常应力水平 $s_0=443$K,$\theta_0=3628$,样本容量 $n=20$. 在各应力水平下模拟的数据为

定时测试模型

s_1:	156	248	275	318	413	$T_1^*=420$	$r_1=5$
s_2:	26	55	66	97	104	$T_2^*=110$	$r_2=5$
s_3:	5	11	14	52		$T_3^*=60$	$r_3=4$
s_4:	3	12	27			$T_4^*=30$	$r_4=3$

定数测试模型

s_1:	156	200	201		$r_1=3$
s_2:	23	26	55		$r_2=3$
s_3:	11	14	24	35	$r_3=4$
s_4:	3	12	15	27	$r_4=4$

用方法 1 计算时,其定时的预测方程为

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}=\exp\{-18.3791+1.02302\varphi(s)\},\\ &\hat{\theta}_0=4538,\hat{p}_0=0.9^3 78,F_0(t)=1-(0.9^3 78)^t;\end{aligned} \tag{I$_a$}$$

其定数的预测方程为

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}=\exp\{-17.5177+0.98483\varphi(s)\},\\ &\hat{\theta}_0=3952,\hat{p}_0=0.9^3 75,F_0(t)=1-(0.9^3 75)^t.\end{aligned} \tag{I$_b$}$$

平均寿命置信下限计算. 给定置信水平 $\alpha=0.05$,由式(8)$\hat{\theta}_{iL}(\alpha)\doteq 1+(\tau_i-r_i)/r_iF_\alpha(2r_i,2(\tau_i-r_i))$,以及数据$(\varphi_i,\ln\hat{\theta}_{iL}(\alpha))(i=\overline{1,m})$,可建立回归方程. 其中,定时预测方程为

$$\hat{\theta}_L(\alpha)=\exp\{-17.6527+1.05113\varphi(s)\}, \tag{L$_a$}$$

$$\hat{\theta}_{0L}(0.05) \doteq 2652, \hat{p}_{0L} = 0.9^3 6.$$

定数预测方程为

$$\hat{\theta}_L(\alpha) = \exp\{-17.65778 + 0.962086\varphi(s)\}, \tag{L_b}$$

$$\hat{\theta}_{0L}(0.05) \doteq 1892, \hat{p}_{0L} = 0.9^3 47.$$

用方法 2 计算要由计算机完成．定时预测方程为

$T_1 = 7705, T_2 = 1443, T_3 = 438, T_4 = 159,$

$r_1 = 5, r_2 = 5, r_3 = 4, r_4 = 3,$

$g_4 = 161, g_3 = 602, g_2 = 2049, g_1 = 9758,$

$$w_4 = \sum_{j_4=159}^{161} \sum_{j_3=438+j_4}^{602} \sum_{j_2=1443+j_3}^{2049} \frac{(437+j_4)!(164-j_4)!}{j_4!\,(161-j_4)!} \cdot \frac{(1442+j_3)!(606-j_3)!}{j_3!\,(602-j_3)!} \frac{(7704+j_2)!(2053-j_2)!}{j_2!\,(2049-j_2)!},$$

$$I_1 = \sum_{j_4=159}^{161} \sum_{j_3=438+j_4}^{602} \sum_{j_2=1443+j_3}^{2049} \frac{(437+j_4)!(164-j_4)!}{j_4!\,(161-j_4)!} \frac{(1442+j_3)!(606-j_3)!}{j_3!\,(602-j_3)!} \cdot \frac{(7704+j_2)!(2053-j_2)!}{j_2!\,(2049-j_2)!}\left(\frac{2054-j_2}{9758}\right),$$

$$\hat{q}_1 \doteq I_1/w_4, \hat{\theta}_1 = 1/\hat{q}_1 = 1551,$$

$$w_3 = \sum_{j_4=159}^{161} \sum_{j_3=438+j_4}^{602} \frac{(437+j_4)!(164-j_4)!(1442+j_3)!(606-j_3)!}{j_4!\,(161-j_4)!\quad j_3!\,(602-j_3)!},$$

$$I_2 = \sum_{j_4=159}^{161} \sum_{j_3=438+j_4}^{602} \frac{(437+j_4)!(164-j_4)!(1442+j_3)!(606-j_3)!}{j_4!\,(161-j_4)!\quad j_3!\,(602-j_3)!}\left(\frac{607-j_3}{2050}\right),$$

$$\hat{q}_2 \doteq I_2/w_3, \hat{\theta}_2 = 1/\hat{q}_2 = 308,$$

$$w_2 = \sum_{j_4=159}^{161} \frac{(437+j_4)!(164-j_4)!}{j_4!\,(161-j_4)!},$$

$$I_3 = \sum_{j_4=159}^{161} \frac{(437+j_4)!(164-j_4)!}{j_4!\,(161-j_4)!}\left(\frac{165-j_4}{603}\right),$$

$$\hat{q}_3 \doteq I_3/w_2, \quad \hat{\theta}_3 = 1/\hat{q}_1 = 158, \hat{q}_4 \doteq r_4/\tau_4, \quad \hat{\theta}_4 = \tau_4/r_4 = 54.$$

再应用回归法得

$$\hat{\theta} = \exp\{-17.6871 + 0.99831\varphi(s)\}, \tag{I_a}$$

$$\hat{\theta}_0 = 4746, \hat{p}_0 = 0.9^3 79.$$

定数预测方程：

$T_1 = 73971, T_2 = 871, T_3 = 430, T_4 = 215,$

$r_1 = 3, r_2 = 3, r_3 = 4, r_4 = 4,$

$g_4 = 218, g_3 = 651, g_2 = 1524, g_1 = 5497,$

$$w_4 = \sum_{j_4=215}^{218} \sum_{j_3=430+j_4}^{651} \sum_{j_2=871+j_3}^{1524} \frac{(429+j_4)!(221-j_4)!(870+j_3)!}{j_4!\,(218-j_4)!\; j_3!\,(651-j_3)!} \cdot \frac{(653-j_3)!(3970+j_2)!(1526-j_2)!}{j_2!(1524-j_2)!},$$

$$I_1=\sum_{j_4=215}^{218}\sum_{j_3=430+j_4}^{651}\sum_{j_2=871+j_3}^{1524}\frac{(429+j_4)!(221-j_4)!(870+j_3)!(653-j_3)!}{j_4!\ (218-j_4)!\ j_3!\ (651-j_3)!\ j_2!}$$

$$\frac{(3970+j_2)!(1526-j_2)!}{(1524-j_2)!}\left(\frac{1527-j_2}{5498}\right),$$

$$\hat{q}_1 \doteq I_1/w_4,\hat{\theta}_1=1/\hat{q}_1=1377,$$

$$w_3=\sum_{j_4=215}^{218}\sum_{j_3=430+j_4}^{651}\frac{(429+j_4)!(221-j_4)!(870+j_3)!(653-j_3)!}{j_4!\ (218-j_4)!\ \ j_3!\ (651-j_3)!},$$

$$I_2=\sum_{j_4=215}^{218}\sum_{j_3=430+j_4}^{651}\frac{(429+j_4)!(221-j_4)!(870+j_3)!(653-j_3)!}{j_4!\ (218-j_4)!\ \ j_3!\ (651-j_3)!}\left(\frac{654-j_3}{1525}\right),$$

$$\hat{q}_2 \doteq I_2/w_3,\quad \hat{\theta}_2=1/\hat{q}_2=322,$$

$$w_2=\sum_{j_4=215}^{218}\frac{(429+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!\ (218-j_4)!},$$

$$I_3=\sum_{j_4=215}^{218}\frac{(429+j_4)!(221-j_4)!}{j_4!\ (218-j_4)!}\left(\frac{222-j_4}{652}\right),$$

$$\hat{q}_3 \doteq I_3/w_2,\quad \hat{\theta}_3=1/\hat{q}_3=121,\quad \hat{q}_4 \doteq r_4/\tau_4,\hat{\theta}_4=\tau_4/r_4=54.$$

再应用回归法得

$$\hat{\theta}=\exp\{-17.5263+0.9874\varphi(s)\}, \tag{Ⅱ b}$$

$$\hat{\theta}_0=4242,\hat{p}_0=0.9^376.$$

下面进行分析．将各个预测方程的 $\hat{a},\hat{b}$ 及 $\hat{\theta}_0,\hat{p}_0$ 列于附表．从表中可以得出以下四点结论．

附表　各个方程的数值比较表

项目	原始值	(Ⅰa)	误差	(Ⅱa)	误差	(Ⅰb)	误差
a	−18	−18.3791	−0.3791	−17.6871	+0.3129	−17.5177	+0.4823
b	1	1.02302	0.02302	0.99831	$-1.69\times^{-3}$	0.98483	−0.0152
$\hat{\theta}_0$	3628	4538	+910	4746	1118	3952	+324
p_0	0.9^37244	0.9^378	$+5.56\times10^{-5}$	0.9^379	$+6.56\times10^{-5}$	0.9^375	$2.56\times^{-5}$

项目	(Ⅱb)	误差	(L_b)	误差	(L_b)	误差
a	−17.5263	+0.4737	−19.6521	−1.6527	−17.6578	+0.3422
b	0.9879	−0.0121	1.05513	+0.05513	0.962086	−0.0379
$\hat{\theta}_0$	4242	+614	2652		1892	
p_0	0.9^376	$+3.56\times10^{-5}$	0.9^362		0.9^347	

(1) 只有方程(La)(Ia)的 $\hat{a}<a$，其余方程的 $\hat{a}>a$，且 $-1.6527<$ 误差 <0.4823.

(2) 只有方程(Ia)与(La)的 $\hat{b}>b$. 其余方程的 $\hat{b}<b$ 且有 $-0.0379<$ 误差 <0.05113. 以上两点说明各个方程的参数 $\hat{a},\hat{b}$ 与 a,b 的拟合都不错，只有(La)的差一些．

(3) 方程(I_a)，(I_b)，(II_a)，(II_b)的 $\hat{\theta}_0>\theta_0$，而(II_a)，(II_b)的 $\hat{\theta}_0$ 值则大得更多．这说明利用 $s_i(i=1,4)$ 的数据信息，预测 θ_0 时总趋势偏大．因低水平的数据无法提供高水平的寿命信息，而高水平的数据中隐含低水平的寿命信息．应用方法 2 时，先把隐含在高水平数据中的低水平寿命信息综合出来，再进行回归，从而导致低水平的寿命信息在回归中的“权重”增大．因此，预报的 $\hat{\theta}_0$ 值会更大一些，这就证实了方法 2 优于方法 1.

(4) $\hat{\theta}_{0L}(0.05)|_{La}=2652$，$\hat{\theta}_0(0.05)|_{Lb}=1892$，且所有的 $\hat{\theta}_0>\hat{\theta}_{0L}(\alpha)$，这说明对 θ_0 置信下限的预测是可行的．

参　考　文　献

1 茆诗松．指数分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析．应用数学学报，1985，8(3)：311～316

2 Zhang Y T，Yao Q W. Some maximal information and generalized maximal entropy priors. Chinese Journal of Applied Probability and Statisitics，1991，7(2)：192～200

3 茆诗松，王玲玲．可靠性统计．上海：华东师范大学出版社，1984. 177～184

4 方开泰，许建伦．统计分布．北京：科学出版社，1987. 99～107

Bayesian Analysis of Stepstress Accelerated Life Test under Geometric Distribution

Gao Pengxia[①]　　Wu Shaomin[②]

(①Dept. of Math.，Fujian Normal Vniv.，350007 Fuzhou；②Dept. of Man. Info. Sci.，Huaqiao Univ.，362011，Quanzhou)

Abstract Under geometric distribution，the data of fixed time and fixed number truncation test are obtained from stepstress accelerated life test. With thess data，the point estimate and fiducial lower limit of main life are given by applying two methods.

Keywords stepstress，accelerated life test，geometric distribution，Bayesian analyses