解非线性双曲型偏微分方程的预测-校正法*

曾文平 王子丁

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要 把求解二阶常微分方程的预测-校正法推广到解非线性双曲型偏微分方程，并给出几种预测-校正格式．并用数值例子证明这些格式是有效的．

关键词 非线性，双曲型方程，预测-校正法

分类号 O 241.82

近年来，有许多文献[1,2]用预测-校正法来求解非线性抛物型偏微分方程．而用预测-校正法求解双曲型偏微分方程尚属少见．本文用预测-校正法来求解二阶双曲型偏微分方程的混合问题．

$$u_{tt} = a(x)u_{xx} + f(t,u) \qquad (0 < x < X, t > 0), \tag{1}$$

$$a_0u(0,t) + b_0u_x(0,t) = c_0 \qquad (t > 0), \tag{2}$$

$$a_0u(x,t) + b_1u_x(X,t) = c_1 \qquad (t > 0), \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant X), \tag{4}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant X), \tag{5}$$

其中 a_0,b_0,a_1,b_1 及 c_0,c_1 均为常数，$a(x)$，$\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是 x 的连续函数．今后，总假定问题(1)～(5)的解存在且唯一[3]．将区间[0,X]划分为 M 个子区间，每个子区间的长度为 h，即 $Mh=X$；时间变量 t 的步长为 τ，于是区域 $R=[0<x<X]\times[t>0]$ 及其边界(由直线 $x=0$，$x=X$ 和 $t=0$ 所组成)，便可用网点 $(x_m,t_n)=(mh,n\tau)$ 来描述．

在 x 方向，二阶偏微商用如下数值微分公式近似

$$u_{xx} = h^{-2}[u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)] + 0(h^2), \tag{6}$$

而在边界上，一阶偏微商则用下列数值微商公式逼近

$$u_x = (2h)^{-1}[u(x+h,t) - u(x-h,t)] + 0(h^2), \tag{7}$$

并规定向量

$$U(t_n) = (u_0^n, u_1^n, \cdots, u_m^n)^T, \tag{8}$$

为 $t_n=n\tau(n=0,1,2,\cdots)$ 上微分方程的一组数值解，其中 u_m^n，表示在网点 $(mh,n\tau)$ 处 $u(x_mt_n)$ 的一个数值解，即 u_m^n 近似于微分方程混合问题(1)～(5)的解．

* 本文1993-11-17收到；国家教委留学生基金资助课题

由边界条件(2),(3)和(7)可得

$$u_{-1}^n = -2hq_0 + 2hp_0u_0^n + u_1^n + 0(h^3), \tag{9}$$

$$u_{M+1}^n = 2hq_0 - 2hp_1u_M^n + u_{M-1}^n + 0(h^3), \tag{10}$$

其中 $p_0=a_0/b_0, q_0=c_0/b_0, p_1=a_1/b_1, q_1=c_1/b_1$. 应当指出，为保证差分格式稳定性，今后应选取步长比 $\lambda=\tau/h<1$，即满足 Courant 条件．由公式(6),(8),(9),(10)，在时刻 $t_n=n\tau$，问题(1),(2),(3)便可写成向量形式

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} = DBU(t) + f(t,U) + b, \tag{11}$$

其中 $D=\mathrm{diag}\{a_i\}$ 是对角阵，$a_i=a(x_i)$，B 为如下形式的 $(M+1)$ 阶三对角矩阵

$$B = \mathrm{h}^{-2}\begin{bmatrix} 2\mathrm{hp}_0-2 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 2 & -(2+2\mathrm{hp}_1) \end{bmatrix}.$$

$f(t,U)$ 为 $(M+1)$ 维向量 $f(t,U)=f(t,U(t))=(f_0^n,f_1^n,\cdots,f_M^n)^I$，其中 $f_m^n=f(t_m,u_m^n)$. b 亦是 $(M+1)$ 维向量，$b=(-2q_0/h,0,\cdots,0,2q_1/h)^T$. 于是，便将二阶非线性双曲型偏微分方程混合问题(1)～(5)转化为等价的特殊二阶常微分方程组的初值问题

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} = F(t,U(t)), \tag{12}$$

$$U(o) = \varphi, \tag{13}$$

$$U_t(o) = \psi, \tag{14}$$

其中，$F(t,U(t))=DBU(t)+f(t,U(t))b$，$\varphi=(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_M)^{\mathrm{T}}$，$\psi=(\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_M)^{\mathrm{T}}$，$\varphi_m=\varphi(x_m)$，$\psi_m=\psi(x_m)$.

1　PECE 计算格式

考虑式(12),(13),(14)的二阶非线性特殊常微分方程组初值问题的线性多步公式

$$\sum_{j=0}^{K}\alpha_jU^{n+j} = \tau^2\sum_{j=0}^{K}\beta_jF^{n+j}, \tag{15}$$

其特征多项式为 $\rho(\xi)=\sum_{j=0}^{K}\alpha_j\xi^j$，$\sigma(\xi)=\sum_{j=0}^{K}\beta_j\xi^j$.

定义 1　方法(15)是 p 阶方法，如果对于充分可微函数 $U(t)$ 与方法(15)相关的差分算子为

$$\begin{aligned} L[U(t);\tau] &= \sum_{j=0}^{K}\alpha_jU(t+j\tau) - \tau^2\sum_{j=0}^{K}\beta_jU''(t+j\tau) \\ &= C_{p+2}\tau^{p+2}U^{(p+2)}(t) + 0(\tau^{p+3}) \qquad (\tau\to 0). \end{aligned} \tag{16}$$

对于方法(15)，需要研究它的数值解法及其稳定性．早期通常使用 Stomer 显式和 Cowell 隐式方法[4]求其数值解．1976 年 J. D. Lamber 和 L. A. Watson[5]指出采用 Stomer－Cowell 方法出现不稳定现象，从而他们提出具有周期稳定区间的一类线性多步法．1978 年文〔6〕给出这类

方法具有周期稳定区间的一个充要条件．文〔7〕中给出具有最大阶为$k+2$的收敛的k(偶数)步方法的最佳方法．同时给出对于$k=2,4,6,8,10$构造一类具有最大稳定周期区间的最佳方法．将它们推广到本文的方程中可得式(17)，(18)计算公式．当$k=2$，四阶最佳方法为

$$U^{n+2}-2U^{n+1}+U^{n}=\frac{\tau^{2}}{12}(F^{n+2}+10F^{n+1}+F^{n}),\tag{17}$$

即 Numerov 方法，其稳定周期区间为(0,6)．当$k=4$，六阶最佳方法为

$$\begin{aligned}&U^{n+4}-2(1+\lambda)U^{n+3}+2(1+\lambda)U^{n+2}-2(1+\lambda)U^{n+1}+U^{n}\\&=\frac{\tau^{2}}{120}[(9+\lambda)F^{n+4}+8(13-3\lambda)F^{n+3}+2(7-97\lambda)F^{n+2}\\&\quad+8(13-3\lambda)F^{n+1}+(9+\lambda)F^{n}]\qquad(-1<\lambda<1),\end{aligned}\tag{18}$$

其中，λ为试验方程$y''=-\lambda^{2}y,\lambda\in R$的系数，其稳定周期区间为$(0,\frac{60(1+\lambda)}{11+9\lambda})$，最大稳定周期区间为$(0,b)$．

对于形如式(17)，(18)一类隐式格式的求解方法，就产生一个需要在每一个时间水平都去求解非线性代数方程组，通常采用迭代法其计算量相当大，又必须考虑其复杂的收敛性问题．为避免这些麻烦，采用一种简单预测的校正格式．为了方便，对于预测公式可采用显式公式

$$U^{n+2}=2U^{n+1}-U^{n}+\tau^{2}F^{n+1}.\tag{19}$$

由 Taylor 展开可知式(19)近似于式(12)的截断误差为$\frac{1}{12}\tau^{4}U_{t}^{4}$，所以式(19)为二阶方法，并且其周期隐定区间为(0,2)．由显式公式(19)和稳式公式(17)组成预测－校正(PECE)格式的算法如下

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}:\quad U_{(p)}^{n+2}=2U^{n+1}-U^{n}+\tau^{2}F^{n+1},\\&\mathrm{E}:\quad F_{(p)}^{n+2}=F(n\tau,U_{(p)}^{n+2}),\\&\mathrm{C}:\quad U_{(c)}^{n+2}=2U^{n+1}-U^{n}+\frac{\tau^{2}}{12}(F_{(p)}^{n+2}+10F^{n+1}+F^{n}),\\&\mathrm{E}:\quad F_{(c)}^{n+2}=F(n\tau,U_{(c)}^{n+2}),\\&n=n+1;U^{n+2}:=U_{(c)}^{n+2};F^{n+2}:=F_{(c)}^{n+2}.\end{aligned}$$

下面考虑初始出发值计算．由式(13)可得

$$U^{0}=\varphi.\tag{20}$$

由 Taylor 展开
$$U'=U^{0}+\tau U_{t}^{0}+\frac{1}{2}\tau^{2}U_{tt}^{0}+0(\tau^{3}).\tag{21}$$

由式(13)，(14)和式(12)，(13)代入式(21)可得

$$U'=(I+\frac{1}{2}\tau^{2}\mathrm{DB})\varphi+\tau\psi+\frac{1}{2}\tau^{2}f^{0}+\frac{1}{2}\tau^{2}b.$$

2 混合预测－校正格式

对于非线性常微分方程(12)～(14)的初值问题，希望寻找较好的预测－校正方法，即使方法精确度的阶数尽量高；具有无条件的稳定性；计算函数的数量少以及适应较大网孔，容易调整步长等优点．当然这几个优点不可能兼容，但据需要，使各方面都尽可能关照．下面建立一

种混合的预测—校正计算格式．其方法 1，$P_{\frac{1}{2}}EP_{\frac{3}{2}}EP_2(c_2E)^s$ 为

$$P_{\frac{1}{2}}: U^{n+1/2}+\alpha_{1.0}U^n+\alpha_{11}U^{n+1}=\tau^2(\beta_{10}F^n+\beta_{11}F^{n+1}),$$

其中，$U^{n+1/2}$为介于 U^{n+1}及 U^{n+2}之间的某个中间值，并不表示在 $t_{n+1/2}$的值，以下 $U^{n+3/2}$亦同．

$$E:\quad F^{n+1/2}=F(t_{n+1/2},U^{n+1/2}),$$

$$p_{\frac{3}{2}}: U^{n+3/2}+\alpha_{20}U^n+\alpha_{21}U^{n+1}=\tau^2(\beta_{20}F^n+\beta_{21}F^{n+1}),$$

$$E:\quad F^{n+3/2}=F(t_{n+3/2},U^{(n+3/2)}),$$

$$p_2: U^{(n+2)_0}+\alpha_{30}U^n+\alpha_{31}U^{n+1}=\tau^2(\beta_{30}F^n+\beta_{31}F^{n+1}),$$

$$E:\quad F_0^{n+2}=F(t_{n+2},U_0^{n+2}),$$

$$c_2: U_{(\gamma+1)}^{n+1}+\alpha_{40}U^n+\alpha_{41}U^{n+1}=\tau^2(\beta_{40}F^n+\beta_{41}F^{n+1}+\beta_{42}F_{(\gamma)}^{n+2}+\gamma_{41}F^{n+1/2}+\gamma_{42}F^{n+3/2},$$

$$E:\quad F_{(\gamma+1)}^{n+2}=F(t_{n+2},U_{(\gamma+1)}^{n+2}))\qquad(0\leqslant\gamma\leqslant s-1),$$

其中，s 为迭代次数，γ 与 s 的取法详见文〔2〕，$n:n+1$，$U^{n+2}=U_s^{n+2}$，$F^{n+2}=F_s^{n+2}$. 类似于方法 1，还可以建立其他格式．其中，方法 2，$P_{\frac{1}{2}}EP_{\frac{3}{2}}E\,\bar{P}_2E(E)^s$. 方法 3，$P_{\frac{1}{2}}EP_{\frac{3}{2}}E\,\bar{\bar{P}}_2E(CE)^s$. 方法 4，$P_{\frac{1}{2}}EP_{\frac{3}{2}}E\,\bar{\bar{\bar{P}}}_2E(CE)^s$. 这些方法本质上与方法 1 是一致的．只是式(37)式中预测公式 p_2 分别用以下公式代替，即

$$\bar{P}_2: U_0^{n+2}+\bar{\alpha}_{30}U^n+\bar{\alpha}_{31}U^{n+1}=\tau^2(\bar{\beta}_{30}F^n+\bar{\beta}_{31}F^{n+1}+\bar{\gamma}_{32}F^{n+3/2}),$$

$$\bar{\bar{P}}_2: U_{(0)}^{(n+2)}+\bar{\bar{\alpha}}_{30}U^n+\bar{\bar{\alpha}}_{31}U^{n+1}=\tau^2(\bar{\bar{\beta}}_{30}F^n+\bar{\bar{\beta}}_{31}F^{n+1}+\bar{\bar{\gamma}}_{32}F^{n+3/2}),$$

$$\bar{\bar{\bar{P}}}_2: U_{(0)}^{(n+2)}+\bar{\bar{\bar{\alpha}}}_{30}U^n+\bar{\bar{\bar{\alpha}}}_{31}U^{n+1}=\tau^2(\bar{\bar{\bar{\beta}}}_{30}F^n+\bar{\bar{\bar{\beta}}}_{31}F^{n+1}+\bar{\bar{\bar{\gamma}}}_{32}F^{n+3/2}).$$

3　混合预测—校正公式的系数和阶数

设 $U(t)$在〔$0,T$〕内处处可微，并把第 2 节诸公式改用如下线性形式的公式

$$L_i(U(t_n);\tau)=\sum_{j=0}^{K}[\alpha_{ij}U(t_n+j\tau)-\tau^2\beta_{ij}U''(t_n+j\tau)]-\tau^2[\gamma_{i1}U''(t_n+(1/2)\tau)\gamma_{i2}U''(t_n+(3/2)\tau)].\quad(22)$$

对于式(22)中 $U(t_n+j\tau)$，$U''(t_n+j\tau)$，$U''(t_n+(1/2)\tau)$和 $U''(t_n+(3/2)\tau)$采用 Taylor 级数展开式替代，不难得到下列关系，即 $L_i(U(t_n);\tau)=\sum_{j=0}^{\infty}[c_{ij}U^{(j)}(t_n)\tau^j)$. 系数 c_{ij}满足下列关系：$c_{i0}=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}+\alpha_{i2}$，$c_{i1}=\alpha_{i1}+2\alpha_{i2}$，$c_{i2}=\frac{1}{2!}(\alpha_{i1}+2^2\alpha_{i2})-(\beta_{i0}+\beta_{i1}+\beta_{i2}+\gamma_{i1}+\gamma_{i2})$. 由定义 1，如果方法是 p 阶的，必须是 $c_{ir}=0$，($r\leqslant p+1$，$c_{i,p+2}\neq0$)且 $c_{i,p+2}$为截断误差的系数．对于第 2 节诸公式要求最高的阶，就产生各个公式的系数，如表 1 所示．

表 1 混合预测—校正公式的系数

Mode	i	j	α_{i0}	α_{i1}	β_{i0}	β_{i1}	β_{i2}	γ_{i1}	γ_{i2}	order p	$C_i, p+2$
$p_{\frac{1}{2}}$	1	1/2	−1/2	−1/2	−1/16	−1/16	0	0	0	2	5/384
$p_{\frac{3}{2}}$	2	3/2	1/2	−3/2	1/16	5/16	0	0	0	2	−3/384
p_2	3	2	1	−2	0	1	0	0	0	2	1/12
$\bar{p}_2$	3	2	1	−2	0	1/3	0	1/3	1/3	4	−1/576
$\bar{\bar{p}}_2$	3	2	1	−2	1/3	4/3	0	−2/3	0	3	1/24
$\bar{\bar{\bar{p}}}_2$	3	2	1	−2	1/9	2/3	0	0	2/9	3	−1/72
c	4	2	1	−2	1/60	26/60	1/60	16/60	16/60	6	−1/120960

4 混合预测—校正格式的稳定性

方法 1 在 $P_{\frac{1}{2}}EP_{\frac{3}{2}}EP_2EcE$ 形式如下

$$\mathrm{p}_{\frac{1}{2}}: U^{n+1/2} = \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}U^{n+1} - \frac{\tau^2}{16}(F^n + F^{n+1}),$$

$$\mathrm{E}: F^{n+1/2} = F(t_n + \frac{1}{2}\tau, U^{n+1/2}),$$

$$\mathrm{p}_{\frac{3}{2}}: U^{n+3/2} = -\frac{1}{2}U^n + \frac{3}{2}U^{n+1} + \frac{\tau^2}{16}(F^n + 5F^{n+1}),$$

$$\mathrm{E}: F^{n+3/2} = F(t_n + \frac{3}{2}\tau, U^{n+3/2}),$$

$$\mathrm{p}_2: U_{(0)}^{n+2} = 2U^{n+1} - U^n + \tau^2 F^{n+1},$$

$$\mathrm{E}: F_{(0)}^{n+2} = F(t_{n+2}, U_{(0)}^{n+2}),$$

$$\mathrm{c}_2: U_{(1)}^{n+2} = 2U^{n+1} - U^n + \frac{\tau^2}{60}(F_{(0)}^{n+2} + 16F^{n+3/2} + 26F^{n+1} + 16F^{n+1/2} + F^n),$$

$$\mathrm{E}: F_1^{n+2} = F(t_{n+2}, U_{(1)}^{n+2}).$$

在考虑稳定性时，只限于讨论试验方程

$$U_{tt} = -\lambda^2 U \qquad (\lambda > 0). \tag{23}$$

对上述各式应用试验方程(23)得

$$U^{n+1/2} = \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}U^{n+1} + \frac{\bar{\tau}^2}{16}(U^n + U^{n+1}), \tag{24}$$

$$U^{n+3/2} = -\frac{1}{2}U^n + \frac{3}{2}U^{n+1} - \frac{\bar{\tau}^2}{16}(U^n + 5U^{n+1}), \tag{25}$$

$$U_{(0)}^{n+2} = 2U^{n+1} - U^n - \bar{\tau}^2 U^{n+1}, \tag{26}$$

$$U_{(1)}^{n+2} = 2U^{n+1} - U^n - \frac{\bar{\tau}^2}{60}(U_{(0)}^{n+2} + 16U^{n+3/2} + 26U^{n+1} + 16U^{n+1/2} + U^n), \tag{27}$$

其中 $\bar{\tau} = \lambda\tau$，将式(24)～(26)代入式(27)得到二阶方程

$$60U^{n+2} - (120 - 60\bar{\tau}^2 + 5\bar{\tau}^4)U^{n+1} + 60U^n = 0, \tag{28}$$

其特征方程为

$$\rho(\xi,\tau) = 60\xi^2 - (120 - 60\bar{\tau}^2 + 5\bar{\tau}^4)\xi + 60 = 0. \tag{29}$$

定义 2 方法(15)有一周期稳定区域$(0,\bar{\tau}_0^2)$,那么对于所有$\bar{\tau}^2\in(0,\bar{\tau}_0^2)$,特征方程(29)的两个根满足

$$\xi_1 = e^{i\theta(\bar{\tau})}, \qquad \xi_2 = e^{-i\theta(\bar{\tau})}, \tag{30}$$

其中$i^2=-1,\theta(\bar{\tau})\in R$. 在式(29)中,若$-60\bar{\tau}^2+5\bar{\tau}^4=0$,即$\bar{\tau}^2=12$,那么,方程(29)的根满足式(30). 所以,方法 1 的周期稳定区域为(0,12). 相应地方法 2,3,4 的特征方程为$\rho_2(\xi,\bar{\tau})=60\xi^2-(120+60\bar{\tau}^2-5\bar{\tau}^4+\frac{1}{12}\bar{\tau}^6)\xi+60=0$,$\rho_3(\xi,\bar{\tau})=60\xi^2-(120+\frac{182}{3}\bar{\tau}^2-5\bar{\tau}^4+\frac{2}{3}\bar{\tau}^6)\xi+60=0$,$\rho_4(\xi,\bar{\tau})=60\xi^2-(120-60\bar{\tau}^2+5\bar{\tau}^4-\frac{5}{12}\bar{\tau}^6)\xi+60=0$. 方法 1,2,3,4 的周期稳定区域,分别为(0,12),(0,16),(0,15),(0,15).

5 数值例子

为了方便比较,可用本文提出的方法来解文〔3〕中的例子. 考虑非线性二阶双曲型偏微分方程初值问题

$$\begin{aligned}
&U_{tt} = gd(x)U_{xx} + \frac{1}{4}z^2U \qquad (0 < x < X, t > 0),\\
&U_x(0,t) = U_x(X,t) = 0,\\
&u(0,x) = \sin(\frac{\pi x}{X}),\\
&U_t(0,x) = -\frac{\pi}{X}\sqrt{gd}\cos(\frac{\pi x}{X}).
\end{aligned}$$

其中,$d(x)=d_0[2+\cos(\frac{2\pi x}{X})]$称为深度函数,$g$ 是重力加速度,$z=z(x,u)$是底部摩擦系数. 定义 $z=g|u|/c^2d$,c 是查理(drezy)系数. 在此问题中,$p_0=p_1=0,q_0=q_1=0$,由此$\bar{b}=0$,而$D=diag\{gd_i\}$,$d_i=d(x_i)$. 矩阵 B 为

$$B = h^{-2}\begin{bmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$f_m^n = g^2/(4c^4d)|u_m^n|^2u_m^n.$$

取 X=100,g=9.81,d_0=0,c=50. 区间步长 h=10,M=9,时间步长 $\tau=\frac{1}{3}$进行计算. 表 2 给出在 x=80,3570≤t≤3600 处本文方法计算结果与文〔3〕中的参考解(用 $R-K$ 方法所得的比较准确的近似解)的对照表.

表2 几种数值解的对照表($h=10,\tau=\frac{1}{3}$)

方法	t					
	3570.00	3580.00	3583.33	3590.00	3593.33	3600.00
参考解	1.31	1.72	1.04	0.46	1.83	0.20
PECE 格式	1.293	1.68	0.94	0.45	1.88	0.00
混合格式1	1.292	1.67	1.06	0.47	1.86	0.13

参 考 文 献

1 Jacques I B. Predictor-corrector methods of parabobic partial differential equations. Int. J. Numer. Methods, 1983, (19): 451～465

2 Van der Houwen P J, Someijer B P, Baker T H. On the slability of predictor-corrector methods for parabokic equations with delay. IMA. J. Numer. Anal., 1986, (6): 1～23

3 Van der Henrici P J, Sommeijer B P. Explicit runge-kutta (-Nyström) methods with reduced phase errors for computing oscillating solutions. SIAM. J. Numer., 1987, (24): 595～617

4 Henrici P. Discrcte variable methods in ordinary differential equation. John Wiley & Sons. 1962. 0～36

5 Lanber J D, Waston L A. Symmetric multistep methods for periodic initial value problems. J. Inst. Math. Appl., 1976, (18): 189～202

6 Jetsch R. Complete characterization of multistep methods with aninterral of periodictity for sloving $y''=f(x,y)$. Math. Comput., 1978, (2): 1108～1114

7 Bao X S, Xu H Y. A class of optimal methods with the largest periodie interral for solving differential equation $y''=f(x,y)$. SIAM. J. Numer., 1987, (24): 595～617

Predictor—Corrector Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equation of Hyperbolic Type

Zeng Wenping   Wang Ziding

(Dept. of Man. Info. Sci, Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The predictor—corrector method is the method used for solving ordinary differential equation of the second order. The authors generalize it to the solution of nonlinear partial differential equation of hyperbolic type, and give several predictor—corrector schemes which are indicated by numerical examples to be effective.

Keywords nonlinear, partial differential equation of hyperbolic type, predictor-corrector method