纯量 Volterra 积分微分方程的周期解*

王 全 义

(华侨大学管理信息系,泉州 362011)

摘要 研究纯量 Volterra 积分微分方程周期解的存在性和唯一性问题.利用不动点方法,得到这类方程存在唯一的周期解的充分性条件.

关键词 积分微分方程,周期解,存在性,唯一性,不动点方法

分类号 O 175.6

文〔1〕利用 Liapunov 函数,研究了下列纯量 Volterra 积分微分方程 $\dot{x}(t)=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+f(t)$(式 A)的周期解存在性问题.其中,$t\in R$,$x\in R$,$a(t)$和 $f(t)$都是连续的 T-周期函数;$C(t,s)$在$-\infty<s,t<+\infty$上连续且对任意的 s,t,有 $C(t+\mathrm{T},s+\mathrm{T})=C(t,s)$和 $\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s$ 关于 $t\in R$ 有界.本文对方程(式 A)的周期解的存在性和唯一性问题进行研究,在所得的结果中,定理 1 推广了文〔1〕中的定理 5.

1 一些引理

我们先证明一些有用的引理.

引理 1 假设 $C(t,s)$在 $R\times R$ 上连续且 $C(t+\mathrm{T},s+\mathrm{T})=C(t,s)$(这里 $\mathrm{T}>0$ 且为常数)及 $\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s$ 对 $t\in R$ 有界.若 $f_1(t)$是连续的 T-周期函数,则

$$f_2(t)=\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\cdot|f_1(s)|\mathrm{d}s, \tag{1}$$

$$f_3(t)=\int_{-\infty}^{t}C(t,s)f_1(s)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

都是连续的 T-周期函数.

证 由 $\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s$ 的有界性及 $C(t,s)$的连续性和 $f_1(t)$是连续的 T-周期函数易知 $f_2(t)$,$f_3(t)$都是连续函数.又由 $C(t+\mathrm{T},s+\mathrm{T})=C(t,s)$和 $f_1(t+\mathrm{T})=f_1(t)$,可知

$$f_2(t+\mathrm{T})=\int_{-\infty}^{t+\mathrm{T}}|C(t+\mathrm{T},s)|\cdot|f_1(s)|\mathrm{d}s$$

$$\xlongequal{s=\tau+\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{t}|C(t+\mathrm{T},\tau+\mathrm{T})|\cdot|f_1(\tau+\mathrm{T})|\mathrm{d}\tau$$

---

* 本文 1993-11-13 收到;福建省自然科学基金资助项目

$$=\int_{-\infty}^{t}|C(t,\tau)|\cdot|f_1(\tau)|d\tau=f_2(t).$$

同样有 $f_3(t+T)=f_3(t)$. 故 $f_2(t),f_3(t)$都是连续的 T-周期函数．引理1证毕．

引理2 设 $f(t)$是连续的 T-周期函数,则对任意的 $t,s\in R$ 有

$$\int_{s+T}^{t+T}f(\tau)d\tau=\int_{s}^{t}f(\tau)d\tau. \tag{3}$$

证 因为 $\int_{s+T}^{t+T}f(\tau)d\tau \xlongequal{\tau=r+T} \int_{s}^{t} f(r+T)dr=\int_{s}^{t} f(r)dr$ 则式(3)成立．引理2证毕．

考虑下列微分方程

$$dx/dt=a(t)x+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)f_1(s)ds+f(t), \tag{4}$$

这里 $a(t),f(t)$关于 $t\in R$ 是连续的 T-周期函数．$C(t,s),f_1(t)$满足引理1所述的条件．

引理3 如果 $a(t)\leqslant 0$ 且 $\int_{0}^{T} a(\tau)d\tau=K<0$,则方程(4)存在着唯一的 T-周期解 $x(t)$满足

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)dr)[\int_{-\infty}^{\tau}C(\tau,s)f_1(s)ds+f(\tau)]d\tau. \tag{5}$$

证 记 $g(t)=\int_{-\infty}^{t}C(t,s)f_1(s)ds+f(t)$,由引理1知 $g(t)$是连续的 T-周期函数．于是式(4)可写为

$$dx/dt=a(t)x+g(t), \tag{6}$$

从而式(5)可写为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)dr)g(\tau)d\tau. \tag{7}$$

先证式(7)右端是有界的．因为存在常数 $M>0$ 使得 $|g(t)|<M$. 故

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)dr)g(\tau)d\tau\right| &\leqslant\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)dr)|g(\tau)|d\tau\leqslant M\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)dr)d\tau\\
&=M\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t-(j+1)T}^{t-jT}\exp(\int_{\tau}^{t}a(r)dr)d\tau\\
&=M\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t-(j+1)T}^{t-jT}\exp(\int_{t-jT}^{t}a(r)dr+\int_{\tau}^{t-jT}a(r)dr)d\tau\\
&=M\sum_{j=0}^{+\infty}K_1^j\int_{t-(j+1)T}^{t-jT}\exp(\int_{\tau}^{t-jT}a(r)dr)d\tau\\
&\leqslant MT\sum_{j=0}^{+\infty}K_1^j=\frac{MT}{1-K_1}.
\end{aligned}$$

这里 $K_1=e^K<1$,即式(7)右端是有界的．因为

$$\begin{aligned}
x(t+T)&=\int_{-\infty}^{t+T}\exp(\int_{\tau}^{t+T}a(r)dr)g(\tau)d\tau\\
&\xlongequal{\tau=s+T}\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s+T}^{t+T}a(r)dr)g(s+T)ds\\
&=\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s+T}^{t+T}a(r)dr)g(s)ds\\
&=\int_{-\infty}^{t}\exp(\int_{s}^{t}a(r)dr)g(s)ds \qquad \text{(由引理 2)}
\end{aligned}$$

$$= x(t),$$

故 $x(t)$是 T-周期的．直接由微分式(7),可知 $x(t)$是方程(6)(即方程(4))的解．故 $x(t)$是方程(4)的 T-周期解．由于方程(4)的齐次方程

$$dx/dt = a(t)x .$$

不具有非平凡的 T-周期解,因此方程(4)的 T-周期解是唯一的．引理 3 证毕．

引理 4　如果 $a(t)\geqslant 0$ 且 $\int_0^T [-a(\tau)]d\tau=K<0$,则方程(4)具有唯一的 T-周期解 $x(t)$,满足

$$x(t) = -\int_t^{+\infty}\exp(-\int_t^\tau a(r)dr)[\int_{-\infty}^\tau C(\tau,s)f_1(s)ds + f(\tau)]d\tau. \tag{8}$$

证　先把式(8)写为

$$x(t) = -\int_t^{+\infty}\exp(-\int_t^\tau a(r)dr)g(\tau)d\tau. \tag{9}$$

下面先证式(9)的左端是有界的．事实上

$$\begin{aligned}
|-\int_t^{+\infty}\exp(-\int_t^\tau a(r)dr)g(\tau)d\tau| &\leqslant M\int_t^{+\infty}\exp(-\int_t^\tau a(r)dr)d\tau \\
&\leqslant M\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t+jT}^{t+(j+1)T}\exp(-\int_t^\tau a(r)dr)d\tau \\
&= M\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t+jT}^{t+(j+1)T}\exp(-\int_t^{t+jT}a(r)dr - \int_{t+jT}^\tau a(r)dr)d\tau \\
&= M\sum_{j=0}^{+\infty}K_1^j\int_{t+jT}^{t+(j+1)T}\exp(-\int_{t+jT}^\tau a(r)dr)d\tau \\
&\leqslant MT\sum_{j=0}^{+\infty}K_1^j = \frac{MT}{1-K_1},
\end{aligned}$$

这里 $K_1=e^K<1$,即 $x(t)$是有界的．又由引理 2 得

$$\begin{aligned}
x(t+T) &= -\int_{t+T}^{+\infty}\exp(-\int_{t+T}^\tau a(r)dr)g(\tau)d\tau \\
&\overset{\tau=s+T}{=\!=\!=} -\int_t^{+\infty}\exp(-\int_{t+T}^{s+T}a(r)dr)g(s+T)ds \\
&= -\int_t^{+\infty}\exp(-\int_t^s a(r)dr)g(s)ds = x(t),
\end{aligned}$$

即,$x(t)$是 T-周期的．其余部分的证明与引理 3 的证明相同,此处证略．引理 4 证毕．

2　主要结果及其证明

考虑线性积分微分方程

$$\dot{x} = a(t)x(t) + \int_{-\infty}^t C(t,s)x(s)ds + f(t). \tag{10}$$

这里 $a(t)$,$f(t)$是连续的 T-周期函数,$C(t,s)$在 $R\times R$ 上连续且对任意的 $t,s\in R$,$C(t+T,s+T)=C(t,s)$和 $\int_{-\infty}^t|C(t,s)|ds$,对 $t\in R$ 是有界的．

定理 1　假设 $a(t)$不恒等于零且存在着常数 $K>1$,使得下式

$$a(t)+\mathrm{K}\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s\leqslant 0. \tag{11}$$

成立．则方程(10)存在着唯一的 T-周期解．

证 设 $B=\{u(t)\,|\,u(t)$ 为 R 上的连续的 T-周期函数$\}$，则 B 在范数 $\|u\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\{|u(t)|\}$ 下是1个 Banach 空间．由定理的条件，知 $a(t)\leqslant 0$ 且 $\int_0^T a(\tau)\mathrm{d}\tau=\mathrm{K}_1<0$. 对任意的 $u\in B$，考虑下列微分方程

$$\dot{x}=a(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)u(s)\mathrm{d}s+f(t), \tag{12}$$

由引理1知$[\int_{-\infty}^{t}C(t,s)u(s)\mathrm{d}s+f(t)]$是连续的 T-周期函数，又由引理3知方程(12)具有唯一的 T-周期解，即

$$x_u(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}a(r)\mathrm{d}r\right)\left[\int_{-\infty}^{\tau}C(\tau,s)u(s)\mathrm{d}s+f(\tau)\right]\mathrm{d}\tau. \tag{13}$$

现在定义算子 $F:B\to B$ 如下

$$Fu(t)=x_u(t),\qquad \forall\, u\in B. \tag{14}$$

下面证明算子 F 在 B 中是压缩的．

事实上，对任意 $u_1,u_2\in B$，由式(13)和定理的条件，可知

$$\begin{aligned}|Fu_1(t)-Fu_2(t)| &\leqslant\int_{-\infty}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}a(r)\mathrm{d}r\right)\int_{-\infty}^{\tau}|C(\tau,s)|\cdot\|u_1-u_2\|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant\|u_1-u_2\|\int_{-\infty}^{t}\exp\left(\int_{\tau}^{t}a(r)\mathrm{d}r\right)\left[-\frac{a(\tau)}{\mathrm{K}}\right]\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{1}{\mathrm{K}}\|u_1-u_2\|\left[\exp\left(\int_{\tau}^{t}a(r)\mathrm{d}r\right)\right]_{-\infty}^{t}\\ &=\frac{1}{\mathrm{K}}\|u_1-u_2\|,\end{aligned}$$

即 $\|Fu_1-Fu_2\|\leqslant\frac{1}{\mathrm{K}}\|u_1-u_2\|$．因 $\mathrm{K}>1$，故 $\frac{1}{\mathrm{K}}<1$. 由此，F 在 B 中是压缩的，从而 F 在 B 中具有唯一的不动点，易见 F 在 B 中的这个不动点就是方程(10)的唯一的 T-周期解．定理1证毕．

说明 显然文[1]中定理5的条件比本文定理1的条件强，且它的结论比本文定理1的结论弱，因此它是本文定理1的特殊情况．

例1 考虑下列积分微分方程

$$\dot{x}(t)=-x(t)|\sin t|+\mathrm{b}\int_{-\infty}^{t}\exp(-(t-s))|\sin t|x(s)\mathrm{d}s+\cos t. \tag{15}$$

这里：$0<\mathrm{b}<1$ 为常数；$a(t)=-|\sin t|$，$f(t)=\cos t$ 都是 2π-周期函数；$C(t,s)=\mathrm{b}\exp(-(t-s))|\sin t|$，且 $C(t,s)=C(t+2\pi,s+2\pi)$ 和 $C(t,s)$ 在 $R\times R$ 上连续，并 $\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s=\mathrm{b}|\sin t|$ 有界；$a(t)\leqslant 0$ 且 $\int_0^{2\pi}a(t)\mathrm{d}t=-4<0$. 取 $\mathrm{K}=1/\mathrm{b}>1$，则有 $a(t)+\mathrm{K}\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s=0$，因此定理1的所有条件都满足．

故由定理1可知，方程(15)存在着唯一的 2π-周期解．但是，文[1]中定理5是无法判别方程(15)的 2π-周期解的存在性的．

定理 2　假设 $a(t)$ 不恒等于零且存在着常数 $K>1$,使得下式

$$a(t) \geqslant K\int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|\mathrm{d}s. \tag{16}$$

成立,则方程(10)存在着唯一的 T-周期解.

证　利用引理 1,4,此定理的证明与定理 1 的证明类似,此处证明从略.

例 2　考虑下列积分微分方程

$$\dot{x}(t) = |\cos t|x(t) - b\int_{-\infty}^{t} \exp(-(t-s))\cdot(\cos t)\cdot x(s)\mathrm{d}s + \sin t. \tag{17}$$

这里 $0<b<1$ 为常数,很容易验证方程(17)满足定理 2 的所有条件.因此,由定理 2 可知方程(17)具有唯一的 2π-周期解.

参　考　文　献

1　黄启昌.具无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性.中国科学(A 辑),1984,(10):882～889

2　李森林,温立志.泛函微分方程.长沙:湖南科学技术出版社.1987,465～471

Periodic Solution of a Scalar Volterra Integrodifferential Equation

Wang Quanyi

(Dept. of Man. Info. Sci. ,Huaqiao Univ. ,362011,Quanzhou)

Abstract　To a scalar Volterra integrodifferential equation,the author deals with the existence and uniqueness of its periodic solution. The sufficient conditions for existing unique periodic solution of these equations are obtained by fixed point method.

Keywords　integrodifferential equation,periodic solution,existence,uniqueness,fixed point method