

等距曲线可隐含代数精确表示*

陈 思 雄

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 证明古典的平面代数曲线簇空间, 恰是等距运算的不变子空间和 CAD/CAM 常用的自由等距曲线, 可由一次数不超过 $4 \times (\text{原曲线的代数次数}) - 2$ 的隐含代数曲线精确表示.

关键词 等距运算, 代数曲线, 自由曲线

分类号 O 187.1

仅靠体的正则布尔运算的有限组合, 已无法描述物体等长度膨胀或收缩变换即等距运算^[1]. 因此, 等距运算作为一种崭新的体基本运算, 被吸收到现有体素造形系统中. 然而, 在一般情形下, 现有体素造形系统的标准曲线——参数样条或有理曲线经等距变换后却不再是参数样条或有理曲线^[2]. 这样, 目前构造等距曲线大都采用非精确表示的逼近形式^[3]. 本文将证明若把现有体素造形系统的标准曲线, 扩展至隐式代数曲线, 则等距曲线便有精确表示. 一般来说, 运算后等距曲线的代数次数 m 与原曲线的代数次数 n 的平方同阶, 更确切地, $m = 16 \cdot n^2 + 14 \cdot n$. 不过, 对于可参数多项式或有理化的自由曲线来说, 本文又证明其等距曲线的代数次数 m 与原曲线的代数次数 n 只是线性阶.

1 等距运算的不变子空间——平面代数曲线簇空间

众所周知, 若两多项式方程 $F_1(t) = 0$, $F_2(t) = 0$, 含有公共根, 那么当且仅当如下行列式为零, 简记上述行列式为 $\text{Res}_t(F_1, F_2)$, 这里我们将证明有用的引理 1.

$$\text{Res}_t(F_1, F_2) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & & A_{m_0} & & \\ & A_0 & A_1 & \cdots & & A_{m_0} & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & A_0 & A_1 & \cdots & A_{m_0} \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_{n_0} & & & \\ & B_0 & B_1 & \cdots & B_{n_0} & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & B_0 & B_1 & \cdots & B_{n_0} \end{vmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} n_0 \text{ 行} \\ \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} m_0 \text{ 行} \end{matrix}$$

* 本文 1993-10-28 收到

引理 1 设有两二元多项式 $F_1(x_0, x_1)$ 和 $F_2(x_0, x_1)$ (其中 F_1 关于 x_0 的次数是 m_0 , 关于 x_1 的次数是 m_1 ; F_2 关于 x_0 的次数是 n_0 , 关于 x_1 的次数是 n_1), 则 F_1, F_2 关于 x_0 的结式 $\text{Res}_{x_0}(F_1, F_2)$, 是关于 x_1 次数不超过 $m_0 n_1 + n_0 m_1$ 的多项式.

证 由引理 1 假设可知, 存在 x_1 的 m_1 次多项式系数 A_0, A_1, \dots, A_{m_0} , 以及 x_1 的 n_1 次多项式系数 B_0, B_1, \dots, B_{n_0} , 使

$$F_1(x_0, x_1) = \sum_0^{m_0} A_i x_0^{m_0-i}; \quad F_2(x_0, x_1) = \sum_0^{n_0} B_j x_0^{n_0-j}.$$

由结式定义可知, 显然, 该行列式是形如 $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{n_0}} B_{j_1} B_{j_2} \cdots B_{j_{m_0}}$ 乘积的部分和, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_{n_0} \in \overline{(0, m_0)}; j_1, j_2, \dots, j_{m_0} \in \overline{(0, n_0)}$. 若记多项式的次数为 \deg , 则显然 $\deg \leq A_{i_i} \leq m_1$, $\deg(B_{j_i}) \leq n_1, \forall i_i \in \overline{(0, m_0)}, i_i \in \overline{(0, n_0)}$. 因此

$$\begin{aligned} \deg(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{n_0}} \cdot B_{j_1} B_{j_2} \cdots B_{j_{m_0}}) &= \deg(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_{n_0}}) + \deg(B_{j_1} B_{j_2} \cdots B_{j_{m_0}}) \\ &\leq n_0 \cdot m_1 + m_0 \cdot n_1. \end{aligned}$$

然而, 多项式求和不会增加多项式次数. 因此, 结式 $\text{Res}_{x_0}(F_1, F_2)$ 是关于 x_1 次数不超过 $n_0 \cdot m_1 + m_0 \cdot n_1$ 的多项式. 证毕.

如文献[2]所证, 参数样条、有理曲线在等距运算下大都不再是参数样条或有理曲线. 因此, 研究可包含有参数样条、有理曲线的更广一类曲线——平面代数曲线在等距运算下的变化情况, 自然成为我们关心的课题. 本节将利用结式方程, 证明平面代数曲线簇空间恰是等距运算的不变子空间.

定理 1 平面 n 次代数曲线在等距运算下仍是平面代数曲线, 且其等距曲线的代数次数不超过 $16n^2 + 14n$.

证 不妨设原平面 n 次代数曲线为 $F(x, y) = 0$, 其中 $F(x, y)$ 为 x, y 的二元 n 次多项式. 显然, 其等距曲线 r_0 可由满足如下条件的 (x_0, y_0) 集合全体所组成, 即

$$\begin{cases} (x - x_0) \cdot F_y - (y - y_0) \cdot F_x = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - d^2 = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x, y) = 0. & (3) \end{cases}$$

令

$$G_1(x, y, x_0, y_0) = (x - x_0)F_y - (y - y_0)F_x,$$

$$G_2(x, y, x_0, y_0) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - d^2.$$

若记 $H_1(y_1, x_0, y_2) = \text{Res}_x(G_1, G_2)$, $h_2(y_1, x_0, y_0) = \text{Res}_x(G_2, F)$, 则由引理 1 可知, H_1 是关于 y 的 $4n+4$ 次、关于 x_0, y_0 的 $2n+4$ 次的三元多项式. 同理, H_2 是关于 y 的 $4n$ 次、关于 x_0, y_0 的 $2n$ 次的三元多项式. 同样, 由引理 1 可知, $\text{Res}_y(H_2, H_2)$ 是关于 x_0, y_0 的 $16n^2 + 14n$ 的二元多项式. 因此, 得证由 (x_0, y_0) 集合组成的等距曲线 r_0 , 恰满足次数不超过 $16n^2 + 14n$ 的隐含结式方程 $\text{Res}_y(H_1, H_2)(x_0, y_0) = 0$, 或者 r_0 为一次数不超过 $16n^2 + 14n$ 的平面代数曲线方程. 证毕.

2 自由等距曲线的隐含代数表示

首先, 将不证明⁽⁴⁾而直接给出有用的引理 2.

引理 2 平面 n 次参数多项式曲线必是 n 次平面代数曲线.

众所周知,参数多项式、有理曲线均具有几何直观、局部易改、求值方便等良好几何性质,故被统称为自由曲线.为了叙述上的方便,可进一步把自由曲线的等距曲线称为自由等距曲线.本节将证明:与一般平面 n 次代数曲线的等距曲线不同,且可用参数表示的自由等距曲线的代数次数 m ,只是原自由曲线代数次数 n 的线性阶,即 $m=4n-2$.

定理 2 平面参数 n 次多项式曲线 r 的等距曲线 r_0 , 是次数不超过 $4n-2$ 的代数曲线.

证 不妨设存在 t 的 n 次多项式 $p(t), q(t)$, 使 $r = \{(p(t), q(t)) | t \in I\}$, 并且其等距曲线 r_0 可由满足如下条件 (x, y) 集合全体所组成

$$\begin{cases} (p(t) - x)p'(t) + (q(t) - y) \cdot q'(t) = 0, \\ (x - p(t))^2 + (y - q(t))^2 - d^2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$(x - p(t))^2 + (y - q(t))^2 - d^2 = 0. \quad (5)$$

令

$$F_1(t, x, y) = (p(t) - x)p'(t) + (q(t) - y) \cdot q'(t),$$

$$F_2(t, x, y) = (x - p(t))^2 + (y - q(t))^2 - d^2.$$

则存在常数 $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}; B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$; x, y 的线性函数 $A_n, \dots, A_{2n-1}; B_n, \dots, B_{2n-1}$ 及 $B_{2n}(x, y) = x^2 + y^2 - d^2$, 使

$$F_1(t, x, y) = \sum_0^{2n-1} A_i t^{2n-1-i}; F_2(t, x, y) = \sum_0^{2n} B_i t^{2n-i}.$$

对方程组(4)和(5)可求得关于 t 的结式 $\text{Res.}(F_1, F_2)$ 为如下行列式

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} & A_n & \cdots & A_{2n-1} & & & \\ & A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-2} & A_{n-1} & \cdots & & & A_{2n-1} \\ & & & \vdots & & & & & & \\ & & & A_0 & A_1 & & \cdots & & & A_{2n-1} \\ & & & & A_0 & \cdots & A_{n-1} & & \cdots & A_{2n-1} \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & A_0 & & & \cdots & A_{2n-1} \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_{n-1} & B_n & \cdots & B_{2n-1} & B_{2n} & & \\ & B_0 & B_1 & \cdots & B_{n-2} & B_{n-1} & & \cdots & B_{2n-1} & B_{2n} \\ & & & \vdots & & & & & & \\ & & & B_0 & B_1 & & \cdots & & B_{2n-1} & B_{2n} \\ & & & & B_0 B_1 & \cdots & B_{n-1} & & \cdots & B_{2n-1} & B_{2n} \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & B_0 B_1 & & \cdots & & B_{2n-1} & B_{2n} \end{vmatrix}$$

令

$$\alpha_{n,n} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} \\ & A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-2} \\ & & & \vdots & \\ & & & A_0 \end{bmatrix}, \quad \beta_{n,n} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_{n-1} \\ & B_0 & B_1 & \cdots & B_{n-2} \\ & & & \vdots & \\ & & & B_0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\alpha}_{n,n} = \begin{bmatrix} A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{2n-1} \\ A_{n-1} & A_n & \cdots & A_{2n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta}_{n,n} = \begin{bmatrix} B_n & B_{n+1} & \cdots & B_{2n-1} \\ B_{n-1} & B_n & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{2n,2n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2n-2} & A_{2n-1} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta}_{n-1,n} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_{n-1} \\ & B_0 & B_1 & \cdots & B_{n-2} \\ & & \vdots & & \\ & & & B_0 & B_1 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{2n,2n} = \begin{bmatrix} \alpha_{n,n} & \bar{\alpha}_{n,n} \\ 0 & \alpha_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \beta_{2n-1,2n} = \begin{bmatrix} \beta_{n,n} & \bar{\beta}_{n,n} \\ 0 & \bar{\beta}_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

$$\beta_{2n-1,2n-1} = \begin{bmatrix} B_{2n} \\ B_{2n-1} & B_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ B_2 & B_3 & B_{2n} \end{bmatrix};$$

易证 $\alpha_{2n,2n}$ 的逆矩阵

$$\alpha_{2n,2n}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n,n}^{-1} & -\alpha_{n,n}^{-1} \cdot \bar{\alpha}_{n,n} \cdot \alpha_{n,n}^{-1} \\ 0 & \alpha_{n,n}^{-1} \end{bmatrix}.$$

若不妨设 $\text{Res}_t(F_1, F_2)$ 的矩阵形式为 \mathcal{A} , 则

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{2n,2n} & \alpha_{2n,2n-1} \\ \beta_{2n-1,2n} & \beta_{2n-1,2n-1} \end{bmatrix}.$$

对 \mathcal{A} 施行行变换操作

$$\begin{bmatrix} 0 & E_{2n,2n} \\ -\beta_{2n-1,2n} \alpha_{2n,2n}^{-1} & E_{2n-1,2n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{2n,2n} & \alpha_{2n,2n-1} \\ \beta_{2n-1,2n} & \beta_{2n-1,2n-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \alpha_{2n,2n} & \alpha_{2n,2n-1} \\ 0 & (\beta_{2n-1,2n-1} - \beta_{2n-1,2n} \cdot \alpha_{2n,2n}^{-1} \cdot \alpha_{2n,2n-1}) \end{bmatrix},$$

而

$$\beta_{2n-1,2n} \cdot \alpha_{2n,2n}^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{n,n} \alpha_{n,n}^{-1} & (\bar{\beta}_{n,n} - \beta_{n,n} \bar{\alpha}_{n,n} \bar{\alpha}_{n,n}^{-1}) \cdot \alpha_{n,n}^{-1} \\ 0 & \beta_{n-1,n} \cdot \alpha_{n,n}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

易证 $\beta_{2n-1,2n} \cdot \alpha_{2n,2n}^{-1}$ 也是关于 x, y 的线性函数矩阵, 但它与线性函数矩阵 $\alpha_{2n,2n-1}$ 相乘后的 $(\beta_{2n-1,2n} \cdot \alpha_{2n,2n}^{-1}) \cdot \alpha_{2n,2n-1}$, 关于 x, y 的次数则增加为 2. 令 $\beta_{2n-1,2n-1}^* = \beta_{2n-1,2n-1} - \beta_{2n-1,2n} \cdot \alpha_{2n,2n}^{-1} \cdot \alpha_{2n,2n-1}$, 因 $\beta_{2n-1,2n-1}$ 也只是 x, y 的二次函数矩阵, 故 $\beta_{2n-1,2n-1}^*$ 仍是关于 x, y 的二次函数矩阵. 因此, 其行列式 $\det(\beta_{2n-1,2n-1}^*)$ 关于 x, y 的次数 $= 2 \cdot (2n-1)$.

另从上述可知, $\text{Res}_t(F_1, F_2) = \det(\mathcal{A}) = \det(\alpha_{2n,2n}) \cdot \det(\beta_{2n-1,2n-1}^*) = A_0^{2n} \cdot \det(\beta_{2n-1,2n-1}^*)$. 因 A_0 是常数, 所以实际上结式 $\text{Res}_t(F_1, F_2)$ 关于 x, y 的次数也不超过 $2 \cdot (2n-1)$. 至此, 我们得证由满足 $\text{Res}_t(F_1, F_2) = 0$ 的 (x, y) 集合全体所组成的等距曲线 r_0 , 是一次数不超过 $4n-2$ 的平面代数曲线. 证毕.

3 结论

综上所述,我们不仅证明平面代数曲线簇空间是等距运算的不变子空间,而且更重要还在于证明在 CAD/CAM 常用的自由等距曲线的代数次数 m ,只是原自由曲线代数次数 n 的简单线性阶(或即 $m=4n-2$)。因此,借助于原曲线的参数表示,自由等距曲线即可保持原曲线的几何直观、局部易改、求值方便等良好几何性质;同时兼有隐含代数曲线的点在曲线界内外判定方便、求交计算容易等性质。

参 考 文 献

- 1 Rossignac J R, Rechicha A A G. Offsetting in solid modelling. *Comput. Aid Geom. Des.*, 1986, 3(2): 268~324
- 2 陈思雄. 等距运算在现有体素造形系统不可精确表示. *华侨大学学报(自然科学版)*, 1992, 13(3): 309~315
- 3 Tiller W, Hanson E G. Offset of two-dimensional profiles. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 1984, 4(9): 36~46
- 4 Abhyankar S S, Bajaj C. Automatic parametrization of rational curves. *Comput. Aid Geom. Des.*, 1988, 5: 309~321

Offset Curve Can be Precisely Represented by Implicit Algebra

Chen Sixiong

(Dept. of Man. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract It is demonstrated that the space of algebraic curve manifold in classical plane algebra is just the invariant subspace under offset operation. It is further demonstrated that the free curves under offset operation which commonly used in CAD/CAM can be precisely represented by implicit algebraic curve with a degree of algebraic number below $4n-2$, where n is the degree of algebraic number of original curve.

Keywords offset operation, algebraic curve, free curve