第15卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.15 No.1
1994年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 1994

格林公式在有有限多个孤立奇点区域上的运用(Ⅱ)*

吴长泰　黄荣生

(华侨大学管理信息科学系，泉州 362011)

摘要　研究 Green 公式与 Gauss 公式在孤立奇点上的应用，并证明在一定条件下，两个公式可互相沟通．这一结果，对于简化线积分、面积分的计算具有使用价值．

关键词　格林公式，高斯公式，孤立奇点，线积分，面积分

分类号　O 175.6

格林公式具有广泛的应用，尤其在围域中含有孤立奇点的情形时，更显得重要而常见．为使之更具有适用性，本文将作进一步地探讨．

1　择换积分路径

当 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在单连通域中成立，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，与路径无关或沿任何闭路的线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$．就本文所论问题而言，当在单连通域上有

$$\frac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}=\frac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}\ (\text{奇点 } M_0(x_0,y_0)\text{ 除外}),$$

则沿域中的含同一奇点在内且有同一方向(以下称此为“二同”)的所有闭路的曲线积分，有相同的值. 即

$$\oint_L P/\varphi\,\mathrm{d}x+Q/\psi\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & M_0\overline{\in} D\ (D\text{ 为闭曲线 } L\text{ 所围闭域}),\\ C & M_0\in D\text{ 内 } (C\text{ 为常数}).\end{cases}$$

据此，可随意改变并选取所需的积分路径，使计算简化(这种情形尤为实用而有效).

事实上，当 $\frac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}=\frac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}$ (M_0除外)时，L 可为无重点的任意 1 条分段光滑的闭曲线，而 φ,ψ 只需在 D 上连续且只有 1 个零点．在 D 上，任取一条与 L“二同”的闭曲线 L_0. 因 $\frac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}=\frac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}$ ($(x,y)\in D-D_0$)，恒有 $\oint_L=\oint_{L+L_0^-}-\oint_{L_0^-}=\iint\limits_{D-D_0}(\frac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}-\frac{\partial(P/\varphi)}{\partial y})\mathrm{d}\sigma-\oint_{L_0^-}=\oint_{L_0}P/\varphi\,\mathrm{d}x+Q/\psi\mathrm{d}y$ (其中 L_0^- 表示 L_0的反方向)．这表明，$\oint_L P/\varphi\,\mathrm{d}x+Q/\psi\mathrm{d}y$

* 本文 1993-09-15 收到

与路径无关．因此，可在原闭曲线 L 的围域内，任意选定 1 条与 L“二同”的简单闭曲线作为新的积分路径 L_0，并使在 L_0上，$\varphi(x,y)=\psi(x,y)=M$（相当于令 $\varphi=\psi=M$，其对应曲线就是 L_0）．以 L_0代替条件（1°）中的 L，从而得到

$$\oint_L P/\varphi\,\mathrm{d}x+Q/\psi\,\mathrm{d}y=1/M\oint_{L_0}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=1/M\iint_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

其意义是，当 $\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}=\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}$（奇点除外），令被积式中含奇点的因子为常值，消除奇异性，对剩下部分在新闭路及其围域上可使用格林公式．据此，重解 $\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+9y^2}$，因 $\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}=\dfrac{9y^2-4x^2}{(4x^2+9y^2)^2}=\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}$，除 $(0,0)$外成立，故选取 L_0为 $4x^2+9y^2=1$ 的反时针方向．按公式(1)，有

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+9y^2}=\oint_{L_0}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_{4x^2+9y^2\leqslant 1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{3}\,.$$

对比本例的几种解法，式(1)在计算上特别简单、有效且不易出错，显示出其优越性与实用性．对于出现有有限多个（或 P,Q 各具不同的）孤立奇点的情形，其处理方法相似．

可见，对 L 的围域中含有孤立奇点的曲线积分 $\oint_L P/\varphi\,\mathrm{d}x+Q/\psi\,\mathrm{d}y$，可按下述三种情形，分别进行计算．(i) 当 $\varphi[x,y(x)]=\psi[x,y(x)]\neq$常数，且 $\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}\neq\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}$ 时，运用文献[1]公式．(ii) 当 $\varphi[x,y(x)]=\psi[x,y(x)]=$常数时，在原闭路及其围域上运用文[2]公式．(iii)当 $\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}=\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}$（除奇点外），可令 $\varphi(x,y)=\psi(x,y)=$常数，在新闭路及其围域上运用式(1)．

如果 L 的围域 D 中不含任何奇点，此时，$\varphi\neq 0$、$\psi\neq 0$ $(x,y)\in D$，以上各公式就是通常的格林公式．从而，可得到正确运用格林公式的重要且实用的结论：设区域 D 的整个边界曲线可用 1 个方程表示，将曲线方程代入线积分中（消除奇异性或简化），对剩下部分使用格林公式；特别当 $\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial x}=\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial y}$（奇点除外）时，可令被积式中含奇点的因子为常数，然后使用格林公式．

2　拓广后的情形

以上的推证过程及其结论，不难拓广至高斯公式上，只需对照格林公式 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，与高斯公式 $\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$．便知，前者属二维空间，后者属三维空间．用点函数将诸积分统一起来，两个公式的几何含义，是将展布在某一几何形体的域上的积分，用沿该域边界上的积分来表示．因此，可用类比的方法，仿前处理下述情形．当 P,Q,R 及其偏导数在单连通域（即由唯一的闭曲面围成的无洞眼区域）Ω 中含有孤立奇点时，将原曲面积分变形为

$$\oiint_S P/\varphi\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q/\psi\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R/h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中所论及的曲面与各函数是三维空间的．跟线积分与路径无关且相应的有，当 $\partial(P/\varphi)/\partial x+\partial(Q/\psi)/\partial y+\partial(R/h)/\partial z=0$ (奇点 M_0除外)，则

$$\oiint_S=\begin{cases}0 & M_0\overline{\in}\,\Omega \quad (\Omega \text{ 为闭曲面 } S \text{ 所围闭域}),\\ C & M_0\in\Omega \quad (C \text{ 为常数}).\end{cases}$$

以及当满足与上述相应的两个条件，类似地推证，可得与文献〔1〕,〔2〕及式(1)相应的 3 个公式．(i) 当 $\varphi[x,y,z(x,y)]=\psi=h\neq$常数，且 $\partial(P/\varphi)/\partial x+\partial(Q/\psi)/\partial y+\partial(R/h)/\partial z\neq0$，有

$$\oiint_S P/\varphi\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q/\psi\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R/h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial(P/\varphi_1)}{\partial x}+\frac{\partial(Q/\psi_1)}{\partial y}+\frac{\partial(R/h_1)}{\partial z}\right)\mathrm{d}v, \tag{2}$$

其中，$\varphi_1=\varphi[x,y,z(x,y)]$，$\psi_1=\psi[x,y,z(x,y)]$，$h_1=h[x,y,z(x,y)]$，等等．(ii)当 $\varphi[x,y,z(x,y)]=\psi=h=M$ (常数)，得

$$\oiint_S=1/M\oiint_S=1/M\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v. \tag{3}$$

(iii) 当 $\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial x}+\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial y}+\dfrac{\partial(R/h)}{\partial z}=0$ (除奇点外)，可令 $\varphi(x,y,z)=\psi=h=M$ (常数)，得

$$\oiint_S=1/M\oiint_{S_0}=1/M\iiint_{\Omega_0}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v, \tag{4}$$

其中，Ω_0 为新闭曲面(S_0)，$\varphi(x,y,z)=M$ 所围闭域，曲面积分取在 S_0的外侧．

在式(2)，(3)，(4)中，当 Ω 中没有奇点，诸公式就是通常的高斯公式．于是得到结论：若 Ω 是由 1 个方程表示的闭曲面 S 所围成，将曲面方程代入曲面积分中(消除奇异性或简化)，对剩下部分使用高斯公式，特别当 $\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial x}+\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial y}+\dfrac{\partial(R/h)}{\partial z}=0$ (奇点除外)，可令被积式中含奇点的因子为常值，对剩下部分使用高斯公式．例如

$$\oiint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

其中，S 为 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的外侧(a,b,c 均正)．

因$(0,0,0)$ 为 $\varphi=\psi=h=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$在 S 的围域中的唯一零点，且 $\dfrac{\partial(P/\varphi)}{\partial x}+\dfrac{\partial(Q/\psi)}{\partial y}+\dfrac{\partial(R/h)}{\partial z}=0$ (除$(0,0,0)$外)成立，取 S_0为 $x^2+y^2+z^2=R^2(R\leqslant\min(a,b,c))$的外侧，按式(4)有

$$\oiint_S=1/R^3\oiint_{S_0}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1/R^3\iiint_{\Omega_0}3\mathrm{d}v=4\pi,$$

其中，Ω_0为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

这结果可在 S 与 S_0所围复连通域上运用高斯公式加以证明，但为了便于比较各种解法的优缺点，说明式(4)是可取的，可将原积分转换为第一类曲面积分求解，从而验证上述论断．

设曲面 S 上任意点(x,y,z)处的单位外法矢为 $\vec{n}=\{\cos(n,x),\cos(n,y),\cos(n,z)\}$，矢径为 $\vec{r}=\{x,y,z\}=r\{\cos(r,x),\cos(r,y),\cos(r,z)\}$，此处的被积表达式可表为 $\dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{x}{r}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\dfrac{y}{r}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\dfrac{z}{r}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=\dfrac{1}{r^2}[\cos(r,x)\cos(n,x)+\cos(r,y)\cos(n,y)+\cos(r,z)\cos(n,z)]\mathrm{d}s=\dfrac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}s$，得积分为

$$\oiint_S \frac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}s,$$

这是高斯积分的特殊情形，其值为 4π（其中 S 可为任意光滑闭曲面）．其实，只须以 $(0,0,0)$ 为中心，$\varepsilon>0$ 为半径作一球面 $S_\varepsilon\subset S$．在 S 与 S_ε所围的复连通域上，依高斯公式，有

$$\oiint_{S+S_\varepsilon} \frac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}s=0,$$

其中积分取在 S_ε的内侧．从而有

$$\oiint_S \frac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}s=-\oiint_{S_\varepsilon}=\oiint_{S_\varepsilon^-}\frac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}s,$$

S_ε^-表示 S_ε的外侧．因在球面 S_ε^-上，$r=\varepsilon$，$\cos(r,n)=1$，于是

$$\oiint_S \frac{\cos(r,n)}{r^2}\mathrm{d}s=\oiint_{S_\varepsilon^-}\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{d}s=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2=4\pi.$$

问题虽不难解决且计算也方便，但一般地说，将第二类曲面积分转换为第一类曲面积分，并非易事；再者，本例若将原积分转化为二重积分，在计算二重积分时将会遇到更大困难．

对比上述诸解法，式(4)不仅在理论上是正确的，而且在实用上也显得特别简易、有效，便于掌握，故颇具优越性与实用性．

综上所述，二、三重积分与线、面积分的这种内在联系，提供了在有有限多个孤立奇点的区域上，正确运用格林公式、高斯公式的 1 种行之有效的方法，特别当 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$（除奇点外）成立，尤其实用且简捷．

参　考　文　献

1　吴长泰，黄荣生．格林公式在有有限多个孤立奇点区域上的运用．南京航空学院学报，1993，1(1)：66～67

2　吴长泰，黄荣生．探索线积分与二重积分的辩证关系．工科数学，1991，(4)：73～74

Application of Green Formula to the Domain with Finite Isolated Singularities (Ⅱ)

Wu Changtai　Huang Rongsheng

(Dept. of Man. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract The authors apply Green formula and Gauss formula to the isolated singulaities, and prove the interconnection of two formulae under certain condition. The results are of use value for simplifying the computation of line integral and surface integral.

Keywords Green formula, Gauss formula, isolated singularity, line integral, surface integral