

指数分布场合步进应力加速 寿命试验的 Bayes 分析*

吴 绍 敏

(华侨大学管理信息科学系, 泉州 362011)

摘要 在指数分布场合, 根据步进应力加速寿命试验数据, 应用 Bayes 分析法, 给出平均寿命的点估计和置信下限估计.

关键词 指数分布, 步进应力, Bayes 分析

分类号 O 213.2

估计高可靠、长寿命产品的各种可靠性指标时, 因寿命试验时间长、花费大, 不利于产品的更新换代, 故人们一般采用加大应力的加速寿命试验方法. 步进应力加速寿命试验就是其中之一, 简称步加应力试验. 对步进应力试验的统计分析, 其难点在于如何求得各应力水平下的似然函数表达式. 本文在指数分布场合给出了似然函数表达式, 从而可应用 Bayes 分析法, 给出正常应力下产品平均寿命的点估计和置信下限估计.

1 基本假定及引理

不同的物理模型, 其数据处理的方法不同. 步加应力试验的数据处理是基于下列的 3 个基本假定.

假定 I. 在正常应力水平 s_0 及加速应力水平 $s_1 \cdots s_m$ ($s_0 < s_1 < \cdots < s_m$) 下, 产品的寿命都服从指数分布. 也就是说, 在应力 s_i 下, 产品的寿命分布为 $E(\lambda_i)$. 即

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t} \quad (t \geq 0, i = \overline{1, m}), \quad (1)$$

其中, $\lambda_i > 0$ 是失效率, $\theta_i = 1/\lambda_i$ 是平均寿命.

假定 II. 产品的平均寿命 θ 与所加应力水平 s 之间有如下关系

$$\ln \theta = a + b\varphi(s) \quad \text{或} \quad \theta = \exp\{a + b\varphi(s)\}, \quad (2)$$

其中, a, b 是未知参数, $\varphi(s)$ 是应力水平 s 的已知函数. 当应力水平 S 为温度时, $\varphi(s) = 1/s$, 此时模型(2)是阿伦尼斯模型; 当应力 s 为电压时, 模型(2)是逆幂律模型.

假定 III. 产品的剩余寿命仅依赖于当时已累积的失效部分和当时的应力条件, 而与累积方式无关. 就是说, 如果产品的寿命分布为 $F(t)$, 在应力 s_i 下工作 t_i 时间的累积失效概率, 相当于在应力 s_j 下工作 t_j 时间的累积失效概率. 即 $1 - e^{-\lambda_i t_i} = 1 - e^{-\lambda_j t_j}$.

* 本文 1993-10-04 收到; 国务院侨办自然科学基金资助项目

$$t_{ij} = (\lambda_i/\lambda_j)t_i, \quad (3)$$

意指在应力 s_i 下试验 t_i 时间, 相当于应力 s_j 下试验 $(\lambda_i/\lambda_j)t_i$ 时间. 利用式(3), 可对步进试验的数据进行时间折算.

定理 设某产品的寿命服从指数分布, 从一批产品中随机抽取 n 个作步进试验. 在 s_i 水平下试验到时刻 T_i^* , 有 r_i 个失效, 其失效时间为 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ir_i}$, 余下 $(n-R_i)$ 个未失效, 立即提高应力水平继续试验. 其中, $R_i = \sum_{j=1}^i r_j$, 记 $T_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n-R_i)T_i^*$ 为试验总时间, 定时截尾试验 T_i^* 是截尾时间, 定数截尾试验 $T_i^* = t_{iri} (i = \overline{1, m})$. 则

(1) 在水平 s_i 上的似然函数形式一样为

$$L(r_i, T_i, \lambda_i) = \frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!} \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i}, R_0 = 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

上式意指在 s_1 上投试 n 个样品, 到时刻 T_1^* 时, r_1 个失效, $(n-r_1)$ 个未失效试样在 s_2 上继续试验到 T_2^* 止. 由于指数分布的无记忆性, s_2 上的似然函数, 就象 $(n-r_1)$ 个未试验的样品投放在应力水平 s_2 上试验所得的似然函数是一样的. 其余类推.

(2) 定数步进试验时, 还有 $(r_i, T_i) (i = \overline{1, m})$ 是相互独立的.

证 当 $m=3$ 时成立. 记各应力水平的试验数据: s_1 为 $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}, T_1^*$; s_2 为 $t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}, T_2^*$; s_3 为 $t_{31}, t_{32}, \dots, t_{3r_3}, T_3^*$. 由假定 III, 将 s_2, s_3 上的数据折算成 s_1 上的数据. $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}, T_1^*$ 不变, 则 $t_{1r_1+1} = T_1^* + (\lambda_2/\lambda_1)t_{21}, t_{1r_1+2} = T_1^* + (\lambda_2/\lambda_1)t_{22}, \dots, t_{1r_1+r_2} = T_1^* + (\lambda_2/\lambda_1)t_{2r_2}$, 是将 s_2 上的 r_2 个失效数据折算为 s_1 上的数据, $t_{1r_1+r_2+1} = T_2^* + (\lambda_3/\lambda_1)t_{31} = T_1^* + (\lambda_2/\lambda_1)[T_2^* + (\lambda_3/\lambda_1)t_{31}] = T_1^* + (\lambda_2/\lambda_1)T_2^* + (\lambda_3/\lambda_1)t_{31}$. 同理, $t_{1r_1+r_2+2} = T_1^* + (\lambda_3/\lambda_1)T_2^* + (\lambda_3/\lambda_1)t_{32}, \dots, t_{1r_1+r_2+r_3} = T_1^* + (\lambda_2/\lambda_1)T_2^* + (\lambda_3/\lambda_1)t_{3r_3}$, 是 s_3 上的 r_3 个失效数据折算为 s_1 上的失效数据. 那么, $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}; t_{1r_1+1}, t_{1r_1+2}, \dots, t_{1r_1+r_2}; t_{1r_1+r_2+1}, \dots, t_{1r_1+r_2+r_3}$ 为 $E(\lambda_1)$ 的前 $(r_1+r_2+r_3)$ 个顺序统计量, $T = T_1^* + (\lambda_2/\lambda_1)T_2^* + (\lambda_3/\lambda_1)T_3^*$ 为其试验终止时间. 故有

$$\begin{aligned} & P(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}; t_{1r_1+1}, \dots, t_{1r_1+r_2}; t_{1r_1+r_2+1}, \dots, t_{1r_1+r_2+r_3}; \lambda_1) \\ &= \frac{n!}{(n-r_1-r_2-r_3)!} \lambda_1^{r_1+r_2+r_3} \exp\{-\lambda_1[\sum_{j=1}^{r_1+r_2+r_3} t_{ij} + (n-r_1-r_2-r_3)T]\} \end{aligned}$$

逆变换, $|J| = (\lambda_2/\lambda_1)^{r_2} (\lambda_3/\lambda_1)^{r_3}$, 则得

$$\begin{aligned} & P(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}; t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}; t_{31}, t_{32}, \dots, t_{3r_3}; \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) \\ &= \frac{n!}{(n-r_1)!} \lambda_1^{r_1} e^{-\lambda_1 T_1^*} \frac{(n-r_1)!}{(n-r_1-r_2)!} \lambda_2^{r_2} e^{-\lambda_2 T_2^*} \frac{(n-r_1-r_2)!}{(n-r_1-r_2-r_3)!} \lambda_3^{r_3} e^{-\lambda_3 T_3^*}. \end{aligned}$$

由此可见, 定数截尾时, r_i 是常数, T_i 是 r, v , 故定理成立. 定时截尾时, r_i 与 T_i 都是 r, v 且 T_i 中含有 r_i , 故 r_i 与 T_i 之间都不是独立的, 但定理的结论成立. 同理可证 $m>3$ 的情形.

2 Bayes 估计

2.1 点估计

由定理知在应力水平 s_i 下的似然函数为

$$f(r_i, T_i | \lambda_i) = \frac{(n-R_{i-1})!}{(n-R_i)!} \lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i T_i} \quad (i = \overline{1, m}).$$

取 λ_i 的无信息验前分布^[3], $\pi(\lambda_i) = 1/\lambda_i$, 则

$$f(\lambda_i | r_i T_i) = \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i} / \int_0^\infty \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i} d\lambda_i = \frac{T_i^{r_i}}{\Gamma(r_i)} \lambda_i^{r_i-1} e^{-\lambda_i T_i}. \quad (4)$$

在二次损失下, λ_i 的 Bayes 估计为

$$\hat{\lambda}_i = E(\lambda_i | r_i, T_i) = \int_0^\infty \lambda_i f(\lambda_i | r_i, T_i) d\lambda_i = r_i / T_i \quad (i = 1, m),$$

则平均寿命 θ_i 的点估计, $\hat{\theta}_i = T_i / r_i$ ($i = 1, m$), 与最大似然估计一致. 其统计性质: 定数截尾时有 $T_i \sim \Gamma(r_i, \lambda_i)$, $E(T_i / r_i) = \theta_i$, 故 $\hat{\theta}_i = T_i / r_i$ 是 θ_i 的无偏估计量, $\text{Var} \hat{\theta}_i = \theta_i^2 / r_i$; 定时截尾时, r_i 与 T_i 都是 r. v. 且 T_i 中含有 r_i , 故两者不独立. 但由文[2]知下述结论: $2r_i \hat{\theta}_i / \theta_i \sim \chi^2(2r_i + 1)$, $E \hat{\theta}_i \approx (1 + 1/2r_i) \theta_i$, $\text{Var}(\hat{\theta}_i) \approx [(2r_i + 1)/2r_i^2] \theta_i^2$. 由此可推得 $(2r_i \hat{\theta}_i / \theta_i) |_{R_{i-1}} \sim \chi^2(2r_i + 1)$, $(2T_i / \theta_i) |_{R_{i-1}} \sim \chi^2(2r_i + 1)$. 即得: $T_i \sim \Gamma(r_i + \frac{1}{2}, \lambda_i)$, $E[T_i / (r_i + \frac{1}{2})] \approx \theta_i$, $\text{Var}[T_i / (r_i + \frac{1}{2})] \approx \theta_i^2 / (r_i + \frac{1}{2})$, 其中 $i = 1, m$.

2.2 置信下限估计

由式(4)知 $\lambda \sim f(\lambda | r, T) = [T^r / \Gamma(r)] \lambda^{r-1} e^{-\lambda T}$, 令 $Y = 2\lambda T \sim [1/2^{\frac{r}{2}} \Gamma(\frac{2r}{2})] y^{\frac{2r}{2}-1} e^{-y} = \chi^2(2r)$, 故对给定的置信水平 α , 有 $P(Y \leq \chi_\alpha^2(2r)) = 1 - \alpha$. 因此, 可得 λ 的置信上限 $\lambda_u = \chi_\alpha^2(2r) / 2T$, 从而得 θ 的置信下限估计 $\hat{\theta}_L(\alpha) = 2T / \chi_\alpha^2(2r)$,

$$E \hat{\theta}_L(\alpha) = E(2T / \chi_\alpha^2(2r)) \begin{cases} = 2r\theta / \chi_\alpha^2(2r), & \text{当定数截尾时,} \\ \approx 2(r + \frac{1}{2})\theta / \chi_\alpha^2(2r). & \text{定时截尾时.} \end{cases}$$

因平均寿命 θ 的 α 置信下限 $\theta_L(\alpha)$ 总是存在的, 故可规定

$$\theta_L(\alpha) \begin{cases} = 2r\theta / \chi_\alpha^2(2r), & \text{定数截尾时,} \\ \approx 2(r + \frac{1}{2})\theta / \chi_\alpha^2(2r). & \text{定时截尾时.} \end{cases}$$

3 实例

根据 S_i 上的测试数据 (φ_i, η_i) , $\eta_i = \ln \hat{\theta}$, ($i = 1, m$), 应用最小二乘法可建立回归方程: $\ln \hat{\theta} = \hat{a} + \hat{b}\varphi(s) = \eta$, $\hat{a} = \bar{\eta} - \hat{b}\bar{\varphi}$, $\hat{b} = [\sum_{i=1}^m \varphi_i \eta_i - m\bar{\varphi}\bar{\eta}] / [\sum_{i=1}^m \varphi_i^2 - m\bar{\varphi}^2]$. 取 4 个加速温度水平: $S_1 = 160^\circ \text{C} = 433 \text{ K}$, $S_2 = 175^\circ \text{C} = 448 \text{ K}$, $S_3 = 200^\circ \text{C} = 473 \text{ K}$, $S_4 = 210^\circ \text{C} = 483 \text{ K}$. 加速模型为阿伦尼乌斯方程可算得: $\varphi_1 = 1/k_0 S_1 = 26.801\ 308$, $\varphi_2 = 1/k_0 S_2 = 25.903\ 944$, $\varphi_3 = 1/k_0 S_3 = 24.534\ 813$, $\varphi_4 = 1/k_0 S_4 = 24.026\ 846$. 其中, $k_0 = 0.861\ 7 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ 是波尔兹曼常数. 取 $a = -18$, $b = 1$, 即 $\theta_1 = 6\ 642.93$, $\theta_2 = 2\ 707.942$, $\theta_3 = 688.7$, $\theta_4 = 413.99$. 正常使用应力水平 $S_0 = 140^\circ \text{C} = 413 \text{ K}$, $\theta_0 = 24\ 323.36$. 各应力下定时截尾时间各为 $T_1^* = 700$, $T_2^* = 300$, $T_3^* = 110$, $T_4^* = 90$. 样本容量为 50, 在各应力下的 1 组模拟数据(单位: h)如下

S_1 : 99.8, 327.7, 424.5, 489.5, 712.8, 816.0, 998.1, 1 096.2, 1 179.2, 1 307.0;

S_2 : 228.8, 274.5, 312.0, 362.2, 398.3, 402.9, 415.8, 449.0, 507.3, 533.8;

S_3 : 43.9, 46.8, 130.7, 147.1, 153.8, 159.1, 220.8, 241.8, 254.3, 388.2.

(1) 定数情形可算得预测方程为 $\ln \hat{\theta} = -18.722\ 61 + 1.021\ 881/k_0 s$, 求得 θ_0 的估计值 $\hat{\theta}_0 = 21\ 855.8$.

(2) 对于定时的情形, 取 $\hat{\theta} = T/(r + \frac{1}{2})$, 可算得预测方程 $\ln \hat{\theta} = -18.560\ 93 + 1.017\ 975/k_0 s$, 求得 $\hat{\theta}_0 = 23\ 002.63$. 这里应该指出, 研究的问题是求平均寿命 θ 的估计. 因此, 预测对象是 θ , 不是 $\ln \theta$. 我们取 θ 的无偏估计量 $\hat{\theta} = T/r$, 文[1], [2]都选 $\ln \theta$ 的无偏估计量 $\hat{\ln \theta} = \ln T - \psi(r)$, 因而其解出来的 $\hat{\theta}^* = T e^{-\psi(r)} > \hat{\theta} = T/r$, 趋于偏大. 从 a, b 的拟合情况看, 本文比文[2]要好.

(3) 平均寿命置信下限估计. 由 2 可知, 平均寿命的 $\alpha = 0.05$, 置信下限为 $\hat{\theta}_L(\alpha) = 2T/\chi^2_{2r}$ (2r) 则观测数据 $\hat{\theta}_{iL}(\alpha) = 2T_i/\chi^2_{2r_i}$ (记 $\eta_i = \ln \hat{\theta}_{iL}(\alpha)$) 与 φ_i , 可建立回归方程. 定数的置信下限预测方程为

$$\ln \hat{\theta}_L(\alpha) = -19.477\ 22 + 1.033\ 85/k_0 s, \quad (5)$$

求得 $\hat{\theta}_{0L}(\alpha) = 14\ 375.5$. 定时的置信下限预测方程为

$$\ln \hat{\theta}_L(\alpha) = -18.571\ 265 + 0.998\ 94/k_0 s, \quad (6)$$

求得 $\hat{\theta}_{0L}(\alpha) = 13\ 333.1$. 从 a, b 的拟合情况看, 式(6)比式(5)好.

参 考 文 献

- 1 茆诗松. 指数分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析. 应用数学学报, 1985, (3): 311~316
- 2 仲崇新, 张志华. 指数分布场合定时和定数截尾步进应力加速寿命试验的统计分析. 应用概率统计, 1991, 7(1): 52~59
- 3 Zhang Yaoting, Yao Qiwei. Some maximal information and generalized maximal entropy priors. Journal of Applied Probability and Statistics, 1991, 7(2): 192~221

Bayesian Analysis of Stepstress Accelerated Life Testing under Exponential Distribution

Wu Shaomin

(Dept. of Man. Info. Sci., Huaqiao Univ., 362011, Quanzhou)

Abstract Having the data from stepstress accelerated life testing and applying Bayesian analysis, the author gives point estimate and fiducial lower limit estimate of main life under exponential distribution.

Keywords exponential distribution, stepstress, Bayesian analysis