

超静定预应力连续结构中等效荷载计算

林 雨 生

(土木工程系)

摘要 讨论超静定预应力多跨连续结构在考虑摩擦损失等影响时,预应力筋所建立的有效预应力或有效预拉力的分布,推导出等效荷载的计算公式。

关键词 等效荷载,超静定结构,有效预应力,有效预拉力

0 前言

预应力超静定连续结构和一般的预应力静定结构,在内力分析时较大的区别是预应力对结构的作用,它除了由于预应力筋对构件截面重心轴的偏心作用而产生的主弯矩外,还由于主弯矩引起的结构的变形受到约束(通常是支座的约束),因而在结构中产生了次弯矩。对于次弯矩的求解可用经典的叠加分析方法来计算,文[4]还提出一种新的求解方法,但工程中依然广泛地采用荷载平衡法或等效荷载法,即把曲线预应力筋在施加预应力时产生的与构件轴线相垂直的竖向力——等效荷载来平衡或抵消一部分外荷载,或者把等效荷载作用在结构上,通过结构力学的分析求得的综合弯矩与主弯矩之差而求解次弯矩。因此等效荷载的正确与否和所求的次弯矩有很直接的关系,尤其在近年来超静定连续结构广泛运用于房屋结构中,预应力筋多采用曲线的连续布置形式。这种连续布置的预应力筋与孔道之间的摩擦力的影响使预应力筋上所建立的有效预应力在连续的预应力筋各截面上的分布具有较大的变化,因而对等效荷载沿构件轴线方向的分布也产生较大的影响。本文直接由预应力筋各截面所建立的有效预拉力推导等效荷载的计算公式,以便于求解连续结构的次弯矩。

1 等效荷载的计算公式

在超静定预应力多跨连续结构中,为抵抗正负弯矩,预应力筋的形状一般可采用连续布置的由几段不同曲率的抛物线形式所组成。如图1所示。

图中,1—2, 2—3, 3—4, 4—5都可以采用不同曲率的预应力筋的布筋形式。现取2—4间的梁

本文1992-12-15收到。

段为隔离体,为了便于分析,假设该梁段的预应力筋的曲率是不变的,若采用图2所示的座标时,则可以写出其方程式为

$$y = -\frac{4f}{l^2}x^2 + \frac{4f + y_a - y_0}{l}x + y_0, (1)$$

式中, l 为计算的抛物线的跨度, f 为计算的抛物线的矢高, y_0 为初始点预应力筋的座标, y_a 为计算抛物线段 $x=l$ 处的预应力筋的座标. 在图2(a)中, y_0, y_a 即分别为图1中2,4点处预应力筋的座标. 对于等效荷载的计算,亦可以采用图2(b)的座标体系,即令 $y_0=0, y_a=0$. 由此,上式可以写成局部座标体系的计算式

$$y = -\frac{4f}{l^2}x^2 + \frac{4f}{l}x, (2)$$

即所求的等效荷载值与 y_0, y_a 无关. 这是因为预应力筋曲线形式的任何线性变换都不影响等效荷载值的计算.⁽¹⁾

若设预应力筋在施加预应力时产生的主弯矩为 M_x , 次弯矩为 M_c , 综合弯矩为 M_m , 则很容易由预应力筋对中心轴的偏心矩求得主弯矩为

$$M_x = F_x \cdot \cos\alpha \cdot y, (3)$$

式中, F_x 为预应为筋中各截面所建立的有效预拉力, α 为曲线布置的预应力筋计算截面处的切线和 x 轴线间的夹角. 因为次弯矩沿梁的轴线方向呈线性分布,所以可得 $M_c = A \cdot x + B$, 其中 A, B 均为常数. 由此,综合弯矩为

$$M_m = M_x + M_c = F_x \cdot \cos\alpha \cdot y + A \cdot x + B. (4)$$

若以 ω_x 表示等效荷载沿 x 轴线方向的分布,则可由荷载和弯矩之间的微分关系解得

$$\frac{d^2M_m}{dx^2} = \omega_x = (F_x \cdot \cos\alpha \cdot y)'' , (5)$$

如不考虑预应力损失的影响,即有效预应力沿预应力筋的分布为常数. 当张拉端预应力筋的张拉控制力为 N_{con} 时, $F_x = N_{con}$, 且如预应力筋的形状比较平坦时,即可近似地解得 $\cos\alpha = 1$. 由此得

$$\frac{d^2M_m}{dx^2} = \omega_0 = (N_{con} \cdot y)'' = N_{con} \cdot y'', (6)$$

式(6)即为不考虑预应力损失影响的等效荷载的表达式.

对于二次抛物线如式(2), 得

$$y' = -\frac{8f}{l^2}x + \frac{4f}{l}, (7)$$

$$y'' = -\frac{8f}{l^2}, (8)$$

$$\frac{d^2M_m}{dx^2} = \omega_0 = N_{con} \cdot y'' = -\frac{8f}{l^2}N_{con}. (9)$$

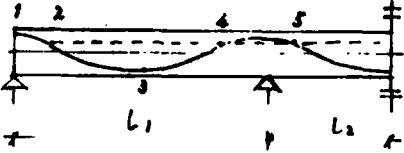
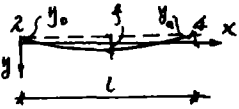
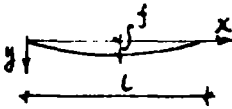


图1 预应力筋曲线布置示意图



(a)



(b)

图2 预应力筋的局部座标

表示不考虑预应力损失影响时,对于二次抛物线形布置预应力筋的预应力结构在施加预应力时引起的等效荷载为一常数.对超静定结构的计算,用式(9)所求得的等效荷载将存在较大的误差,因为曲线连续布置的预应力筋由于摩擦损失的影响引起的预应力筋的预拉力 F_x 沿预应力筋轴线是变化的.根据式(5)可得

$$\begin{aligned} \omega_x = & F_x \cdot \cos \alpha \cdot y'' + F_x \cdot \cos'' \alpha \cdot y + F_x'' \cos \alpha \cdot y \\ & + 2F_x \cos' \alpha \cdot y' + 2F_x' \cos' \alpha \cdot y + 2F_x' \cdot \cos \alpha \cdot y', \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)即为等效荷载的计算式。

2 预应力(预拉力)沿预应力筋的分布

对于二次抛物线的布筋形式,预应力筋在张拉时与孔道之间的摩擦力引起预应力的损失,使预应力筋中所建立的有效预应力或预拉力发生变化,而砼的收缩、徐变和钢筋的应力松弛可视为沿预应力筋是不变的.预应力筋上所建立的有效预拉力和摩擦力的关系可由下式求得

$$N = F_x d\theta = F_x \frac{dl}{r_x}, \quad (11)$$

$$\alpha F_x = -\mu N = -\mu F_x \cdot d\theta = -\mu F_x \frac{dl}{r_x}, \quad (12)$$

式中, N 为有效预拉力 F_x 绕微角 $d\theta$ 所产生的法向压力的分量; r_x 为预应力筋曲线半径; μ 为摩擦系数.移项后,两边积分得

$$\int_{F_s}^{F_x} \frac{dF}{F} = -\mu \int_{\theta} d\theta, \quad (13)$$

$$\ln F_x - \ln F_s = -\mu \int_{\theta} d\theta, \quad (14)$$

$$F_x = F_s \cdot e^{-\mu \int_{\theta} d\theta}, \quad (15)$$

式中 F_s 为张拉端有效张拉力.

同理,考虑了孔道偏摆效应或长度效应引起的预应力损失后的影响,则有效预拉力 F_x 可写成

$$F_x = F_s e^{-\mu \int_{\theta} d\theta - k \int_{l} dl}, \quad (16)$$

式中 k 即为考虑了孔道每米长使局部偏差的摩擦系数.其中

$$\int_{\theta} d\theta = \int_{l} \frac{dl}{r_x} = |\arctan y' - \arctan y'_0|, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_{l} dl = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx &= \frac{1}{|y''|} \left\{ (y'/2) \sqrt{1+y'^2} + \frac{1}{2} \ln(y' + \sqrt{1+y'^2}) \right\} \\ &- \left[\frac{y'_0}{2} \sqrt{1+y_0'^2} + \frac{1}{2} \ln(y'_0 + \sqrt{1+y_0'^2}) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

式中, y'_0 为 y' 在 $x=0$ 处的值,即 $y'_0 = 4f/l$.对于二次抛物线的布筋形式的预应力连续结构,可分别取其局部座标.将式(7)、(8)代入式(17)、(18)后再代入式(16)即可求得预应力筋所建立的有效预拉力的分布.

当考虑锚具变形和预应力筋回缩引起的预应力损失的影响时,在反向摩擦影响长度范围内的有效预拉力的分布可写为^[6]

$$F_{xf} = F_x - 2N_{con}l_f(\frac{\mu}{r_c} + k)(l_f - x), \tag{19}$$

$$l_f = (\frac{aE_s}{1000\sigma_{con}} \frac{1}{(\mu/r_c + k)})^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

式中, r_c 为圆弧曲线预应力筋的曲率半径, l_f 为反向摩擦影响长度, a 为锚具变形和钢筋回缩值, E_s 为预应力筋弹性模量, σ_{con} 为张拉控制应力. 对于多跨预应力连续结构, 锚具损失引起的有效预应力的变化在边端跨 l_f 的范围内, r_c 可取 $r_c \approx 1/|y''|$.

3 等效荷载的求解

根据上述推导, 等效荷载的计算可式由(10)、(16)联立求解. 若令 $uD = k \int_1 dl + \mu \int d\theta$, 则 $F_x = F_e \cdot e^{-uD}$, 解得

$$F_x' = -F_e \cdot e^{-uD} \cdot uD', \tag{21}$$

$$F_x'' = F_e \cdot e^{-uD} (uD'^2 + uD''), \tag{22}$$

$$uD' = k \sqrt{1 + y'^2} + \mu \frac{|y''|}{1 + y'^2}, \tag{23}$$

$$uD'' = k \frac{|y' \cdot y''|}{\sqrt{1 + y'^2}} + \mu \frac{2y' - y''|y''|}{(1 + y'^2)^2}, \tag{24}$$

又

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos' \alpha = -\frac{y' \cdot y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad \cos'' \alpha = \frac{y''^2(2y'^2 - 1)}{(1 + y'^2)^{5/2}}. \tag{25}$$

将式(23)、(24)代入式(21)、(22)和式(25)后再代入式(10), 即可解得等效荷载的分布值. 当考虑锚具回缩损失产生的影响时, 由式(19)得

$$F'_{xf} = F'_x - 2N_{con}l_f(\mu/r_c + k). \tag{26}$$

并将 F_{xf} 、 F'_{xf} 分别替代式(10)中的 F_x 、 F'_x , 且 $F''_x = 0$, 则可求得张拉端 l_f 长度范围内的等效荷载的分布.

4 计算实例

设一预应力三跨连续梁, 考虑其对称, 如图3所示. 配置连续的抛物线形预应力筋. 如考虑了砼收缩徐变和钢筋应力松弛引起的

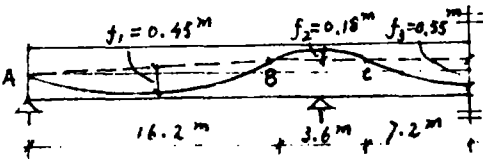


图3 预应力筋的布置方案

的预应力损失的影响, 张拉端有效预拉力的 $F_e = 1640\text{KN}$, ($N_{con} = 1800\text{KN}$), 钢筋弹性模量 $E_s = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$, $\sigma_{con} = 1040 \text{N/mm}^2$. 锚具变形和钢筋回缩值 $a = 1\text{mm}$. 孔道和预应力筋间的摩擦系数 $k = 0.003$, $\mu = 0.35$. 计算预应力在结构中产生的等效荷载的分布.

根据图3, 取 AB、BC 和 CD 三段曲线, 分别按各自的局部坐标计算. 由式(2)、(7)、(8)求

得 y 、 y' 和 y'' (表1), 再由式(16)、(21)、(22)、(25)求得各曲线段不同截面的计算参数(表2), 并代入式(10)即求得相应的等效荷载的分布值。其中在 l_f 的长度范围内, 考虑了张拉端锚具变形和钢筋回缩的影响。

表1 各曲线段的 y 、 y' 、 y''

曲线段	Y	Y'	Y''
AB	$-0.0069x^2 + 0.111x$	$-0.0137x + 0.111$	-0.0137
BC	$0.0556x^2 - 0.200x$	$0.1110x - 0.200$	0.111
CD	$-0.0106x^2 + 0.153x$	$-0.00210x + 0.153$	-0.021

表2 各曲线段不同截面计算参数

预应力筋位置	FX	FX'	FX''	$\cos\alpha$	$\cos'\alpha$	$\cos''\alpha$
曲线段 AB						
$x=0.00$	1511.339	12.859	.000	.993884	.001496	-.000178
$x=0.1L$	1532.281	12.996	.000	.996073	.001205	-.000182
$x=0.2L$	1553.447	13.135	.000	.997785	.000908	-.000184
$x=0.3L$	1574.841	13.287	.000	.999014	.000608	-.000187
$x=0.4L$	1559.325	-12.162	.089	.999753	.000305	-.000188
$x=0.5L$	1539.744	-12.012	.094	1.000000	.000000	-.000188
$x=0.6L$	1520.409	-11.858	.096	.999753	-.000305	-.000188
$x=0.7L$	1501.325	-11.702	.097	.999014	-.000608	-.000187
$x=0.8L$	1482.495	-11.543	.099	.997785	.000908	-.000184
$x=0.9L$	1463.925	-11.382	.100	.996073	-.001205	-.000182
$x=L$	1445.617	-11.219	.101	.993884	-.001496	-.000178
曲线段 BC						
$x=0.00$	1445.617	-58.479	.039	.980581	.020953	-.010297
$x=0.1L$	1424.584	-58.346	.442	.987441	.017116	-.010996
$x=0.2L$	1403.628	-58.052	.931	.992877	.013050	-.011569
$x=0.3L$	1382.806	-57.595	1.418	.996815	.008804	-.011995
$x=0.4L$	1362.178	-56.979	1.896	.999201	.004434	-.012257
$x=0.5L$	1341.800	-56.207	2.354	1.000000	.000000	-.012346
$x=0.6L$	1321.727	-55.287	2.750	.999201	-.004434	-.012257
$x=0.7L$	1302.010	-54.230	3.113	.996815	-.008804	-.011995
$x=0.8L$	1282.696	-53.050	3.436	.992877	-.013050	-.011569
$x=0.9L$	1263.827	-51.762	3.715	.987441	-.017116	-.010996
$x=L$	1245.439	-50.381	3.947	.980581	-.020953	-.010297
曲线段 CD						
$x=0.00$	1245.439	-12.818	.063	.988530	.003132	-.000405
$x=0.1L$	1227.073	-12.688	.076	.992614	.002536	-.000421
$x=0.2L$	1208.904	-12.545	.089	.995825	.001921	-.000434
$x=0.3L$	1190.948	-12.391	.102	.998138	.001289	-.000443
$x=0.4L$	1173.222	-12.226	.114	.999534	.000647	-.000448
$x=0.5L$	1155.742	-12.051	.126	1.000000	.000000	-.000450

5 讨论

(1) 等效荷载的分布是一条微微弯曲的曲线分布,其凹凸方向和预应力筋的抛物线的凹凸方向相同。(2)等效荷载值随 x 的增大而呈下降趋势,其递减速度亦随 x 值的增加而增大。(3)本例题中 AB 曲线段的 B 点处等效荷载值 ω_B 和不考虑摩擦损失值 ω_0 之比相差31.3%,在 BC 段的 c 点处相差25.5%。可见摩擦力损失的影响须予考虑。

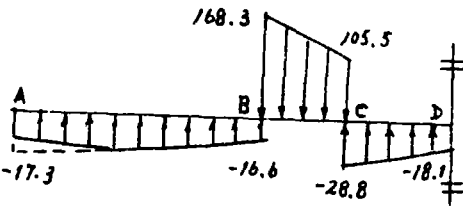


图4 预应力等效荷载分布

表3 各曲线段不同截面的等效荷载

预应力筋位置	等 效 荷 载 ω_x (kN/m)		
	AB 段	BC 段	CD 段
$x=0.00$	-17.262	168.327	-28.804
$x=0.10L$	-18.347	168.048	-28.263
$x=0.20L$	-19.402	166.223	-27.580
$x=0.30L$	-20.422	162.841	-26.759
$x=0.40L$	-21.995	157.949	-25.810
$x=0.50L$	-21.210	151.647	-24.741
$x=0.60L$	-20.382	144.093	-23.569
$x=0.70L$	-19.517	135.472	-22.306
$x=0.80L$	-18.620	126.005	-20.968
$x=0.90L$	-17.696	115.932	-19.572
$x=L$	-16.750	105.496	-18.136

本文直接由预应力筋中所建立的有效预拉力出发推导了等效荷载的计算公式,适用于各种长度和不同转角的二次抛物线预应力筋的预应力结构的等效荷载的计算.该式易于在微机上使用,可提高计算精度和扩大适用范围.也便于各种简化计算时的比较和参照。

参 考 文 献

[1] 林同炎等(路湛沁等译),预应力砼结构设计,中国铁道出版社,(1983).
[2] 杜拱辰编著,现代预应力混凝土结构,中国工业出版社,(1988).
[3] 陈永春、陈国梅,预应力超静定结构的等效荷载计算,建筑结构学报,2(1988).
[4] 杨建明、吕志涛,预应力砼超静定结构弯矩的简捷计算,建筑结构学报,3(1989).
[5] 混凝土结构设计规范(GBJ10-89).

Calculation of the Equivalent Load in a Statically Indeterminate Prestressed Continuous Structure

Lin Yusheng

(Department of Civil Engineering)

Abstract In a multi-span statically indeterminate prestressed continuous structure with such effects as friction loss being taken into account, the distribution of effective prestress or effective pretension along prestressing tendons is discussed; and thus a formula for calculating the equivalent load is directly derived.

Key words equivalent load, statically indeterminate structure, effective prestress, effective pretension.