第14卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol.14 №.4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct.1993

非线性椭圆型方程混合边值问题解有界模估计

林应标 曾文平
(厦大数学系) (华大数学系)

摘要 本文用比较原理与构造辅助函数得到拟线性椭圆型方程混合边值问题解的有界模估计，以及Moser迭代法导出散度型椭圆混合边值问题弱解的有界模估计．

关键词 非线性，椭圆型方程，有界模估计，比较原理，Moser迭代法

本文将讨论散度型及非散度型椭圆方程混合边值问题的有界模估计．首先，对于内、外边界分别为 s_1、s_2 的环形域 $\Sigma\subset/R^n$，考虑如下问题

$$\begin{cases} Qu\equiv a^{ij}(x)D_{ij}u+f(x,u,Du)=0, & x\in\Sigma, \\ B_1u\equiv D_\gamma u+\beta(x)u=\varphi(x), & x\in s_1, \\ u=\psi(x), & x\in s_2. \end{cases} \tag{1}$$

这里 Σ 满足内部球条件，$\Sigma\in c^1$，D_γ 是 s_1 上每一点处给定的外余法向导数，$\vec{n}$ 表示外法向．假定

$$0<\lambda|\xi|^2\leqslant a^{ij}(x)\xi_i\cdot\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\forall\ x\in\Sigma,\xi\in/R^n, \tag{2}$$

$$\beta(x)\geqslant\beta_0>0,\qquad x\in s_1, \tag{3}$$

其中 λ、Λ、β_0 都是正常数．

在导出BVP(1)的古典解有界模估计之前，先建立一个比较原理

引理1 设 u、$v\in c^2(\Sigma)\cap c^1(\bar{\Sigma})$ 满足

$$\begin{cases} Qu\geqslant QV, & x\in\Sigma, & (4)\\ B_1u\leqslant B_1v, & x\in s_1, & (5)\\ u\leqslant v, & x\in s_2. & (6)\end{cases}$$

又设式(2)、(3)成立，

$$f(x,z,p)\in c^1(\bar{\Sigma}\times/R\times/R^n),$$

$$f_z(x,z,P)\leqslant 0,$$

$$\forall\ (x,z,p)\in\bar{\Sigma}\times/R\times/R^n,$$

本文1993—01—28收到．

那末在 Σ 中，$u\leqslant v$.

证明

$$
\begin{aligned}
Qu - Qv &= a^{ij}(x)\cdot[D_{ij}u - D_{ij}v] + f(x,u,Du) - f(x,v,Dv) \\
&= a^{ij}(x)\cdot D_{ij}(u-v) + [f(x,u,Du) - f(x,u,Dv)] \\
&\quad + [f(x,u,Dv) - f(x,v,Dv)] \\
&= a^{ij}(x)\cdot D_{ij}(u-v) + f_{p_i}(x,u,Dv+\theta_i(Du-Dv)) \\
&\quad \cdot D_i(u-v) + f_z(x,v+\theta(u-v),Dv)\cdot(u-v), \\
&\qquad (0<\theta<1, 0<\theta_i<1, i=1,2,\cdots,n).
\end{aligned}
$$

记 $u-v=w$，$f_{p_i}(x,u,Dv+\theta_i(Du-Dv))=b^i(x)(1\leqslant i\leqslant n)$，$f_z(x,v+\theta(u-v),Dv)=c(x)\leqslant 0$. 从而把式(4)—(6)化为

$$
\begin{cases}
Lw \equiv a^{ij}(x)\cdot D_{ij}w + b^i(x)\cdot D_iw + c(x)w \geqslant 0, & x\in\Sigma, \\
B_1w \leqslant 0, & x\in s_1, \\
w \leqslant 0, & x\in s_2,
\end{cases}
$$

因此据极 在 Σ 中 $w\leqslant 0$，即 $u\leqslant v$.

定理 2)、(3)成立，$f\in c^1(\bar{\Sigma}\times/R\times/R^n)$. 如果存在常数 μ_1、$\mu_2\geqslant 0$，使得

$$
a \quad \frac{p)}{p_ip_j}\mathrm{sgn}z \leqslant \frac{\mu_1}{|p|} + \frac{\mu_2}{|p|^2}, \forall\ (x,z,p)\in\bar{\Sigma}\times/R\times(/R^n-\{0\})
$$

那末对 $u\in c^2(\Sigma)\cap c^1(\bar{\Sigma})$ 满足 BVP(1)，都有估计

$$
\operatorname*{Sup}_{\Sigma}|u| \leqslant \operatorname*{Sup}_{s_2}|\psi| + \frac{1}{\beta_0}\operatorname*{Sup}_{s_2}|\varphi| + c, \tag{7}
$$

这里 $c=c(\mu_1,\mu_2,\lambda,\Lambda,\mathrm{diam}\Sigma)$

证明 定义算子 $\bar{Q}$

$$
\bar{Q}v = a^{ij}(x)\cdot D_{ij}v + f(x,u,Dv).
$$

不妨设 Σ 位于带形域 $0<x_1<d$ 中($\mathrm{diam}\Sigma=d$)，取 $v(x)=c_1-e^{\alpha x_1}$，这里 c_1、α 为待定正数.

在 $\Sigma^+=\{x\in\Sigma|u(x)>0\}$ 中，有

$$
\bar{Q}v \leqslant -\frac{a''(D,v)^2}{e^{\alpha x_1}}\{1-\frac{\mu_1}{\alpha}-\frac{\mu_2}{\alpha^2}-e^{-\alpha x_1}\},
$$

若取 α 足够大，则在 Σ^+ 中，$\bar{Q}v<0=\bar{Q}u$.

在 s_1 上，$D_\gamma v+\beta(x)v=-\alpha a''e^{\alpha x_1}\cos(\vec{n},x_1)+\beta(c_1-e^{\alpha x_1})$，若取 $c_1\geqslant e^{\alpha d}+\beta_0^{-1}(\operatorname*{Sup}_{s_1}|\varphi|+\alpha e^{\alpha d}\cdot\Lambda)$，则 $D_\gamma v+\beta v\geqslant\operatorname*{Sup}_{s_1}|\varphi|\geqslant\varphi=D_\gamma u+\beta u$；若取 $c_1\geqslant e^{\alpha d}+\operatorname*{Sup}_{s_2}|\psi|$，则在 s_2 上，$v\geqslant\operatorname*{Sup}_{s_2}|\psi|\geqslant\psi=u$. 于是当取 c_1 充分大时，有

$$
\begin{cases}
\bar{Q}u \geqslant \bar{Q}v, & x\in\Sigma^+, \\
B_1u \leqslant B_1v, & x\in s_1, \\
u \leqslant v, & x\in s_2,
\end{cases}
$$

因此由引理 1，在 Σ^+ 中 $u\leqslant v$.

完全一样地在 $\Sigma^-=\{x\in\Sigma|u(x)<0\}$ 中可证明 $u\geqslant -v$，所以 $|u|\leqslant v$，故有估计式(7).

下面考虑散度型方程的混合边值问题

$$\begin{cases} D_i(a^{ij}\cdot D_ju+b^iu)+c^i\cdot D_iu+d\cdot u=g, x\in\Sigma, & (8)\\ u=\varphi, \quad x\in s_1, & (9)\\ (a^{ij}D_ju+b^iu)\cos(\vec{n},x_i)+\beta u=\psi, x\in s_2, & (10)\end{cases}$$

这里 $\vec{\nu}$ 为 s_2 上点的外法向量，$\varphi\in w^{1,2}(\Sigma)$.

记 $c_0^1(\Sigma\cup s_2)=\{u\in c^1(\bar{\Sigma})\,|\,\mathrm{supp}u\subset\subset\Sigma\cup s_2\}$，而 $w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$ 表 $c_0^1(\Sigma\cup s_2)$ 在 $w^{1,2}(\Sigma)$ 中的闭包. 从 Sobolev 空间理论知，$\int_\Sigma|Du|^2dx$ 与 $\|\cdot\|_{w^{1,2}(\Sigma)}$ 是空间 $w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$ 的等价范数，且成立如下的嵌入定理[2]

引理2　若 $u\in w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$，则有

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Sigma)}\leqslant c\|Du\|_{L^2(\Sigma)}$$

$$\|u\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Sigma)}\leqslant c\|Du\|_{L^2(\Sigma)}(n\geqslant 3),$$

这里 C 是一个几何常数；当 $n=2$ 时，$\|\cdot\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Sigma)}$ 和 $\|\cdot\|_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Sigma)}$ 可用 $\|\cdot\|_{L^t(\Sigma)}$ 和 $\|\cdot\|_{L^t(\partial\Sigma)}$ 代替 $(2<t<+\infty)$.

如果 $u\in w^{1,2}(\Sigma)$ 满足 $u-\varphi\in w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$，并对所有 $v\in w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$

$$\int_\Sigma[(a^{ij}D_ju+b^iu)\cdot D_iv-(c^iD_iu+du)v]dx$$
$$=-\int_\Sigma gvdx+\int_{s_2}[\psi-\beta u]vds, \tag{11}$$

则称 u 为 BVP(8)－(10)的弱解.

关于 BVP(8)－(10)的弱解的极值原理，可见文[3]. 为导出 BVP(8)－(10)的有界模估计，这里先建立弱解全局有界性.

定理2　假定存在正常数 λ、Λ 使

$$\lambda|\xi|^2\leqslant a^{ij}(x)\xi_i\cdot\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2, \forall\, x\in\Sigma, \xi\in R^n,$$
$$\|\lambda^{-2}(|b^i|^2+|c^i|^2)|+\lambda^{-1}(|d|+|g|)\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}\leqslant\Lambda, q>n, \tag{12}$$
$$\|\lambda^{-1}(|\psi|+|\beta|)\|_{L^p(s_2)}\leqslant\Lambda, p>n-1,$$

如果 u 是 BVP(8)－(10)的 $w^{1,2}(\Sigma)$ 解，则 $u\in L^\infty(\Sigma)$，且有

$$\sup_{\bar{\Sigma}}|u|\leqslant c\{\|u\|_{L^2(\Sigma)}+\|Du\|_{L^2(\Sigma)}+\sup_{s_1}|\varphi|+\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}+\|\psi\|_{L^p(s_2)}\},$$

其中 $c=c(\lambda,\Lambda,p,q,n,\mathrm{diam}\Sigma,s_2)$.

证明　以下将采用 Moser 迭代法来证明之. 令 $l=\sup\limits_{s_1}|\varphi|\geqslant 0$，对 $k>0$，$\delta\geqslant 1$，取函数 $H(z)\in c^1(k,+\infty)$：$H(z)=z^\delta-(k+l)^\delta$，当 $k\leqslant z\leqslant N$；$H(z)$ 为线性函数，当 $z>N$. 又令 $w=(u-l)^++(k+l)$. 在式(11)中取试验函数 $v=G(w)=\int_{k+l}^w|H'(z)|^2dz$，于是把式(11)化为

$$\int_\Sigma a^{ij}\cdot D_ju\cdot D_iw\cdot G'(w)dx=-\int_\Sigma b^iu\cdot G'(w)\cdot D_iwdx$$
$$+\int_\Sigma[c^iD_iu+du-g]G(w)dx+\int_{s_2}[\psi-\beta u]G(w)ds, \tag{13}$$

因而利用式(12)与 Schwartz 不等式，立得如下估计

$$\lambda\int_{\Sigma} G'(w)\cdot|Dw|^2dx \leqslant \int_{\Sigma} a^{ij}\cdot D_ju\cdot G'(w)\cdot D_iwdx, \tag{14}$$

$$-\int_{\Sigma} b^iu\cdot G'(w)\cdot D_iwdx \leqslant \int_{\Sigma}|b^i|\cdot w\cdot G'(w)|D_iw|dx$$

$$\leqslant \varepsilon\int_{\Sigma} G'(w)\cdot|Dw|^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\Sigma}(\Sigma|b^i|^2)\cdot G'(w)\cdot w^2dx, \tag{15}$$

$$\int_{\Sigma}[c^iD_iu + du - g]G(w)dx$$

$$\leqslant \int_{\Sigma}\{|c^i|\cdot|D_iw| + |d|w + |g|\}\cdot w\cdot G'(w)dx, \tag{16}$$

$$\int_{s_2}[\psi - \beta u]G(w)ds \leqslant \int_{s_2}(|\psi| + |\beta|w)G'(w)wds$$

$$\leqslant \int_{s_2}(\frac{|\psi|}{k} + |\beta|)G'(w)w^2ds, \tag{17}$$

所以可推得

$$\lambda\int_{\Sigma} G'(w)\cdot|Dw|^2dx \leqslant 2\varepsilon\int_{\Sigma} G'(w)\cdot|Dw|^2dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{\Sigma}(\Sigma|b^i|^2 + |c^i|^2)\cdot G'(w)\cdot w^2dx$$
$$+\int_{\Sigma}(|d| + \frac{|g|}{k})\cdot G'(w)\cdot w^2dx + \int_{s_2}(\frac{|\psi|}{k} + |\beta|)\cdot G'(w)w^2dx,$$

取 $\varepsilon=\frac{\lambda}{4}$，记 $\lambda^{-2}\Sigma(|b^i|^2+|c^i|^2)+\lambda^{-1}(|d|+\frac{|g|}{k})=\bar{b}$，$\lambda^{-1}(\frac{|\psi|}{k}+|\beta|)=\bar{c}$，即有

$$\int_{\Sigma}|DH(w)|^2dx \leqslant 2\{\int_{\Sigma}\bar{b}\cdot(H'(w)\cdot w)^2dx + \int_{s_2}\bar{c}\cdot(H'(w)\cdot w)^2ds\}. \tag{18}$$

令 $\hat{n}=n$. 当 $n>2$ 时，$2<\hat{2}<\min\{q,p+1\}$，故由引理 2 和式(18)立得

$$\|H(w)\|^2_{L^{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}}(\Sigma)} + \|H(w)\|^2_{L^{\frac{2(\hat{n}-1)}{\hat{n}-2}}(s_2)}$$
$$\leqslant c\{\|\bar{b}\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}\cdot\|H'(w)w\|^2_{L^{\frac{2q}{q-2}}(\Sigma)}$$
$$+\|\bar{c}\|_{L^p(s_2)}\cdot\|H'(w)w\|^2_{L^{\frac{2p}{p-1}}(s_2)}\},$$

取 $k=\lambda^{-1}\{\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}+\|\psi\|_{L^p(s_2)}\}$，则易得

$$\|H(w)\|_{L^{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}}(\Sigma)} + \|H(w)\|_{L^{\frac{2(\hat{n}-1)}{\hat{n}-2}}(s_2)} \leqslant c\{\|H'(w)w\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}(\Sigma)} + \|H'(w)w\|_{L^{\frac{2p}{p-1}}(s_2)}\},$$

其中，$c=c(\lambda,\Lambda,p,q,n,\Sigma,s^2)$. 注意到 $H(w)$ 的定义，并让 $N\to+\infty$，这样从 $w\in L^{\delta\frac{2q}{q-2}}(\Sigma)\cap L^{\delta\frac{2p}{p-1}}(s_2)$ 可导出 $w\in L^{\delta\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}}(\Sigma)\cap L^{\delta\frac{2(\hat{n}-1)}{\hat{n}-2}}(s_2)$，故 $w\in[\bigcap_{r>1}L^r(\Sigma)]\cap[\bigcap_{r>1}L^r(s_2)]$. 易知

$$\|w\|^{\delta}_{L^{\delta x_1q^*}(\Sigma)} + \|w\|^{\delta}_{L^{\delta x_2\bar{p}}(s_2)} \leqslant c\delta\{\|w\|^{\delta}_{L^{\delta q^*}(\Sigma)} + \|w\|^{\delta}_{L^{\delta\bar{p}}(s_2)}\},$$

其中，$q^*=\frac{2q}{q-2}$，$\bar{p}=\frac{2p}{p-1}$，$x_1=\frac{\hat{n}}{q^*}>1$，$x_2=\frac{\hat{n}}{\bar{p}}>1$.

令 $=\min\{x_1,x_2\}>1$，那末

$$\|w\|^{\delta}_{L^{\delta xq^*}(\Sigma)} + \|w\|^{\delta}_{L^{\delta x\bar{p}}(s_2)} \leqslant c\delta\{\|w\|^{\delta}_{L^{\delta q^*}(\Sigma)} + \|w\|^{\delta}_{L^{\delta\bar{p}}(s_2)}\},$$

于是

$$\max\{\|w\|_{L^{\delta xq^*}(\Sigma)} + \|w\|_{L^{\delta x\bar{p}}(s_2)}\} \leqslant (2c\delta)^{\frac{1}{\delta}}\max\{\|w\|_{L^{\delta q^*}(\Sigma)}, \|w\|_{L^{\delta\bar{p}}(s_2)}\}.$$

取 $\delta=x^m$，$m=0,1,2,\cdots$，经过迭代得

$$\max\{\|w\|_{L^{\chi^{m+1}q^*}(\Sigma)},\|w\|_{L^{\chi^{m+1}\bar{p}}(s_2)}\}\leqslant(2c)^{\sum_{i=0}^{m}\chi^{-i}}\cdot X^{\sum_{i=0}^{m}i\chi^{-i}}\cdot\max\{\|w\|_{L^{q^*}(\Sigma)},\|w\|_{L^{\bar{p}}(s_2)}\}.$$

让 $m\to\infty$，立得

$$\begin{aligned}\sup_{\Sigma}w+\sup_{s_2}w&\leqslant c_1\{\|w\|_{L^{q^*}(\Sigma)}+\|w\|_{L^{\bar{p}}(s_2)}\}\\&\leqslant c_2\{\|Dw\|_{L^2(\Sigma)}+\|w\|_{L^2(\Sigma)}\}(\text{由嵌入引理}).\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{\Sigma}u^{+}+\sup_{s_2}u^{+}\leqslant c_3\{\|Du\|_{L^2(\Sigma)}+\|u\|_{L^2(\Sigma)}+k+l\},$$

用 $(-u)$ 代 u，同理可得

$$\sup_{\Sigma}(-u)^{+}+\sup_{s_2}(-u)^{+}\leqslant c_3\{\|Du\|_{L^2(\Sigma)}+\|u\|_{L^2(\Sigma)}+k+l\},$$

从而定理获证.

最后建立弱解的有界模估计

定理 3　设式(12)成立，$\varphi\in w^{1,2}(\Sigma)$，$\sup_{s_1}|\varphi|<+\infty$，且对 $\forall\ v\geqslant0, v\in w_0^{1,1}(\Sigma\cup s_2)$ 有

$$\int_{\Sigma}(dv-b^iD_iv)dx-\int_{s_2}\beta vds\leqslant0,\tag{19}$$

那末

$$\sup_{\bar{\Sigma}}|u|\leqslant\sup_{s_1}|\varphi|+c(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}+\|\psi\|_{L^{p}(s_2)})\tag{20}$$

其中，$c=c(\lambda,\Lambda,p,q,n,\Sigma,s_2)$.

证 明　由定理 2 知，u 在 Σ 中有界. 令 $\sup_{s_1}|\varphi|=l$，$\sup_{\Sigma}(u-l)^{+}=M$，取 $v=\frac{(u-l)^{+}}{M+k-(u-l)^{+}}$，$k>0$. 易得 $v\in w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$，代入式(11)，并利用式(19)立得

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma}a^{ij}\cdot D_ju\frac{M+k}{[M+k-(u-l)^{+}]^2}\cdot D_i(u-l)^{+}dx\\&\leqslant\int_{\Sigma}(c^i+b^i)\frac{(u-l)^{+}}{M+k-(u-l)^{+}}D_iudx\\&-\int_{\Sigma}g\frac{(u-l)^{+}}{M+k-(u-l)^{+}}dx+\int_{s_2}\psi\frac{(u-l)^{+}}{M+k-(u-l)^{+}}ds.\end{aligned}$$

令 $w=\log\frac{M+k}{M+k-(u-l)^{+}}\in w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$，易得

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma}a^{ij}\cdot D_ju\frac{M+k}{M+k-(u-l)^{+}}\cdot D_iwdx\\&\leqslant\int_{\Sigma}(c^i+b^i)\frac{(u-l)^{+}}{M+k-(u-l)^{+}}D_iudx\\&-\int_{\Sigma}g\frac{(u-l)^{+}}{M+k-(u-l)^{+}}dx+\int_{s_2}\psi\frac{(u-l)^{+}}{M+k-(u-l)^{+}}ds,\end{aligned}$$

经直接计算得

$$\int_{\Sigma}|Dw|^2dx\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_{\Sigma}\Sigma(|b^i|^2+|c^i|^2)|dx+\frac{2}{\lambda}\int_{\Sigma}\frac{|g|}{k}dx+\frac{2}{\lambda}\int_{s_2}\frac{|\psi|}{k}ds.$$

因此，$\|w\|_{L^2(\Sigma)}\leqslant\|w\|_{W^{1,2}(\Sigma)}\leqslant c(\lambda,\Lambda,p,q,n,\Sigma,s_2)$.

现证明上面所定义的 w 是某个混合边值问题的弱下解. 在式(11)中取 $v=\frac{\eta}{M+k-(u-l)^+}$,其中 $\eta\geqslant 0,\eta\in w_0^{1,2}(\Sigma\cup s_2)$,立得

$$\int_\Sigma a^{ij}\cdot D_jw\cdot D_i\eta dx\leqslant\int_\Sigma c^i\cdot D_iw\eta dx+\int_\Sigma\frac{|g|}{k}\eta dx+\int_{s_2}\frac{|\psi|}{k}\eta ds.$$

从而说明 w 是以下 BVP

$$\begin{cases}D_i(a^{ij}\cdot D_jw)+c^i\cdot D_iw=-\dfrac{|g|}{k}, & x\in\Sigma,\\ w=0, & x\in s_1,\\ a^{ij}(x)\cdot D_jw\cos(\vec{n},x_i)=\dfrac{|\psi|}{k}, & x\in s_2.\end{cases}$$

的弱下解,于是由定理 2 得

$$\operatorname*{Sup}_{\bar{\Sigma}} w\leqslant c\{\|Dw\|_{L^2(\Sigma)}+\|w\|_{L^2(\Sigma)}+\|\frac{g}{k}\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}+\|\frac{\psi}{k}\|_{L^p(s_2)}\}.$$

取 $k=\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}+\|\psi\|_{L^p(s_2)}$,那末有

$$\operatorname*{Sup}_{\bar{\Sigma}} w=\log\frac{M+k}{k}\leqslant c_1,\text{即 } M\leqslant(e^{c_1}-1)k=ck.$$

于是

$$\operatorname*{Sup}_{\bar{\Sigma}} u\leqslant\operatorname*{Sup}_{s_1}|\varphi|+c(\|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Sigma)}+\|\varphi\|_{L^p}(s_2)).$$

为估计 infu,只要在上述的证明中以($-u$)代 u,即可得之,故本定理证毕.

参　考　文　献

[1] Protter, M. H., Weinberger, H. f., *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice—Hall, Englewood cliffs, N. J., (1967).

[2] Adams, R. A., 索伯列夫空间(叶其孝等译), 人民教育出版社, (1983).

[3] Trudinger, N. S., *Math. Z.*, 156(1977), 291—301.

Global Estimates of the Solutions of Mixed Boundary Value Problems for Nonlinear Elliptic Equations

Lin Yingbiao　　　　Zeng Wenping

(*Xiamen University*)　　　　(*Hua Qiao University*)

Abstract　Starting from quasilinear elliptic equations, global estimates of the solutions of mixed boundary value problems are obtained by means of comparison principle and constructing auxiliary functions. In the case of elliptic equations with divergence form, global boundedness and estimates of the weak solutions of mixed boundary value problems are derived by Moser iteration.

Key word nonlinear elliptic equation, mixed boundary value problem, global estimate, comparison principle, Moser iteration