第14卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 14 №. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1993

关于色多项式的若干注记

王 志 雄

(管理信息科学系)

摘要 给出若干类型多项式为简单图的色多项式的充分必要条件、连通图和连通双分图的色多项式必须满足的条件,研究图及其补图的色多项式对图特征的描述程度.并提出若干值得进一步探讨的问题.

关键词 图,色多项式,连通图,双分图

0 引言

用λ种颜色对n阶简单图G的顶点正常染色,使图G中任一对相邻的顶点染不同的颜色,这样的染色方法数记为$\pi_G(\lambda)$. $\pi_G(\lambda)$是λ的n次多项式,称为图G的色多项式.设

$$\pi_G(\lambda)=a_n(\lambda)_n+a_{n-1}(\lambda)_{n-1}+\cdots+a_1(\lambda)_1+a_0, \tag{1}$$

其中,$(\lambda)_i=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)$为$\lambda$的降$i$阶乘[1].

由色多项式定义$\pi_G(0)=0$,即$a_0=0$.实际上,若图G的色数,即图G能够正常染色所需要的颜色数的最小值$\chi(G)=k$,则$\pi_G(0)=\pi_G(1)=\cdots=\pi_G(k-1)=0$,$\pi_G(k)>0$,故$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$,$a_k>0$.更一般地说,由式(1)得

$$\begin{aligned}
&a_0 &&=\pi_G(0)\\
&a_0+a_1(1)_1 &&=\pi_G(1)\\
&a_0+a_1(2)_1+a_2(2)_2 &&=\pi_G(2)\\
&\quad\vdots\\
&a_0+a_1(n)_1+a_2(n)_2+\cdots+a_n(n)_n &&=\pi_G(n)
\end{aligned}$$

故对$i=0,1,2,\cdots,n$有

$$i!a_i=\left[\binom{i}{0}\pi_G(i)-\binom{i}{1}\pi_G(i-1)+\cdots+\binom{i}{i}(-1)^i\pi_G(0)\right],$$

本文1992—05—25收到.
福建省自然科学基金会资助课题.

即 $i!a_i$ 是图 G 恰能用 i 种颜色正常染色的方法数，或等价地说，a_i 是把图 G 的补图 $\overline{G}$ 的顶点集 $V(\overline{G})=V(G)$ 划分为 i 个非空子集 $V_1,\cdots,V_i$，每一部分的导出子图 $\overline{G}[V_t]$ $(1\leqslant t\leqslant i)$ 是完全图的划分数，因而，当 $i\geqslant\chi(G)$ 时，a_i 均为正整数. 特别地，$a_n=1$；$a_{n-1}=\binom{n}{2}-e(G)$，其中 $e(G)$ 为简单图 G 的边数；a_{n-2} 为图 $\overline{G}$ 中的 2-边匹配数和 K_3 个数的总和；a_{n-3} 为图 $\overline{G}$ 中的 3-边匹配数，无公共顶点的 K_3 和 K_2 对数目及 K_4 个数的总和，即含图 1 中(a)、(b)、(c)为子图的数目之和.

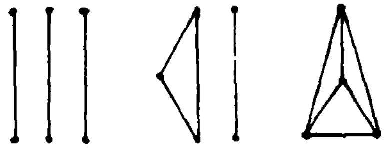
图 1　a_{n-3} 计数的子图

1　若干类型的色多项式

定理 1　多项式 $(\lambda)_n$ 为完全图 K_n 的色多项式.

证　显然.

定理 2　多项式 $(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}$ $(a>0)$ 为某个 n 阶图之色多项式，当且仅当 $1\leqslant a\leqslant n-1$，而且，以同一多项式 $(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}$ $(1\leqslant a\leqslant n-1)$ 为色多项式的简单图，在同构意义下是唯一的.

证　与完全图 K_n 的某一顶点关联的 $(n-1)$ 条边中去掉 a 条边后得到的图 G，色多项式是 $(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}$. 反之，若某图 G 的色多项式是 $(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}$，则其补图 $\overline{G}$ 有 n 个顶点，a 条边，这 a 条边有一个公共的端点，否则，图 $\overline{G}$ 中有 2-边匹配数或 K_3，从而，其色多项式中 $(\lambda)_{n-2}$ 的系数不为 0，与前述条件矛盾. 由此得 $1\leqslant a\leqslant n-1$，且证得以 $(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}$ 为色多项式的简单图只能是从 K_n 中去掉有一公共端点的 a 条边得到，即在同构意义下是唯一的.

定理 3　多项式 $(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}+b(\lambda)_{n-2}$ $(b>0)$ 为某个 n 阶图的色多项式，当且仅当存在正整数 x,y，使 a,b 为下列七种取值类型之一(表 1).

表 1　定理 3 中 a,b 的取值

类型	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ
a 之取值	$x+y$	$x+y$	$x+y$	$x+y+1$	$x+y+1$	$x+y+1$	5
b 之取值	xy	$xy-1$	$xy-2$	xy	$xy-1$	$xy-2$	5
x,y 范围	$x+y\leqslant n-2$ $xy\neq0$	$x+y\leqslant n-1$ $x,y\geqslant2$	$x+y\leqslant n$ $x,y\geqslant2$	$x+y\leqslant n-2$ $xy\neq0$	$x+y\leqslant n-1$ $xy\geqslant2$	$x+y\leqslant n$ $x,y\geqslant2$	$5\leqslant n$

证　图 G 之色多项式是 $(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}+b(\lambda)_{n-2}$ $(b>0)$，当且仅当图 G 有 n 个项点，其补图 $\overline{G}$ 有 a 条边，图 $\overline{G}$ 中的 2-边匹配数和 K_3 个数之和为 $b>0$，图 $\overline{G}$ 不含如图 1(a)、(b)、(c)所示之子图. 故图 $\overline{G}$ 之非空图分支数至多是 2.

情况 1. 图 $\overline{G}$ 含有两个非空图分支. 因图 $\overline{G}$ 不含图 1(a)、(b)为子图，故每一分支不含 K_3，也不含 2-边匹配数，即都是星. 设这两个星(图 2)分别是 S_{x+1} 和 S_{y+1} $(x\geqslant1,y\geqslant1)$，这儿 S_{p+1} 表示有 $p+1$ 个顶点的星. 则 $x+1+y+1\leqslant n$，且 $a=x+y$，$b=xy$，恰为类型 I.

情况 2. 图 $\overline{G}$ 仅有一个非空图分支，且这一分支含有圈(简单回路). 因图 $\overline{G}$ 不含图 1(a)为

子图，故此圈长$\leqslant 5$.（1）当图$\bar{G}$中最大圈长$=5$.因图$\bar{G}$不含图1(a)、(b)为子图，故这一分支恰为圈C_5，这时，$n\geqslant 5$，$a=b=5$，恰为类型Ⅶ.（2）当图$\bar{G}$中最大圈长$=4$.因图$\bar{G}$不含图1诸图为子图，故它所有其余边均与这一圈的某一相对顶点关联，即图$\bar{G}$仅如图3所示的两种情况.对于图3(2)a，$x+y\leqslant n$，$a=x+y+1$，$b=xy-2(x\geqslant 2,y\geqslant 2)$，恰为类型Ⅵ；对于(2)b，$x+y\leqslant n$，$a=x+y$，$b=xy-2(x\geqslant 2,y\geqslant 2)$，恰为类型Ⅲ.（3）当图$\bar{G}$中最大圈长$=3$，因图$\bar{G}$不含图1(a)为子图，故所有的其余的边仅与这一圈之某二顶点关联，且这些边没有其他的公共点（否则，图$\bar{G}$有长$\geqslant 4$的圈），即如

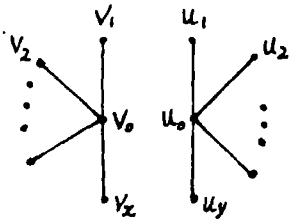

图2　星S_{x+1}和S_{y+1}

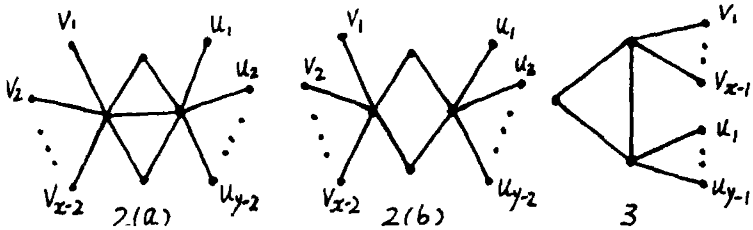

图3　情况2(2)和(3)示意

图3(3)所示.这时，$x+y+1\leqslant n$，$a=x+y+1$，$b=xy-1$.因$b\neq 0$，故$xy\geqslant 2$，恰为类型Ⅴ.

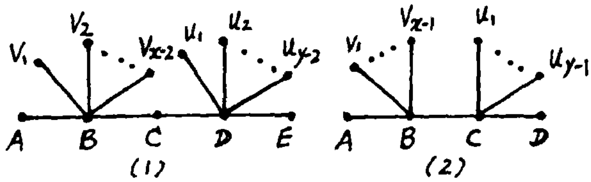

图4　情况3(1)和(2)示意

情况3. 图$\bar{G}$仅含一个非空图分支，这分支是树．因图$\bar{G}$不含图1(a)为子图，故此树中通路长度$\leqslant 4$.（1）当图$\bar{G}$中通路最大长度$=4$，如图4(1)所示，通路ABCDE是一长度为4的通路，则图$\bar{G}$的所有其余的边必与B、D之一关联，故$x+y+1\leqslant n$，$a=x+y$，$b=xy-1(x\geqslant 2,y\geqslant 2)$，恰为类型Ⅰ.（2）当图$\bar{G}$中通路最大长度$=3$，如图4(2)所示，ABCD是一长度为3的通路，则其余的边必与B、C之一关联，故$x+y+2\leqslant n$，$a=x+y+1$，$b=xy(x\geqslant 1,y\geqslant 1)$，恰为类型Ⅳ.（3）当图$\bar{G}$中通路最大长度$=2$，则此分支为星$s_x$，这时，$b=0$，与给定条件矛盾.

综上所述，得所欲证．值得注意的是，以同一多项式$(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}+b(\lambda)_{n-2}(b>0)$为色多项式的简单图，在同构意义下不一定是唯一的．其原因在于定理3所列七种类型不是不相包含的．

例1. 图G_1与G_2之补图如图5所示，显然，G_1与G_2不同构，但$\pi_{G_1}(\lambda)=\pi_{G_2}(\lambda)=(\lambda)_{10}+8(\lambda)_9+15(\lambda)_8$.

定理4　设$n\geqslant 4$，多项式$(\lambda)_n+a(\lambda)_{n-1}+b(\lambda)_{n-2}(b>0)$为某图之色多项式，必要条件是$a$

$=2, b=1$ 或 $a=3, b=1$、2 或 $a>3, a-3 \leqslant b \leqslant [a^2/4]$.

证　直接检验可知，定理 3 所述 a,b 之七种类型取值均满足本定理的条件，得必要性.

应注意，定理 4 的条件不是充分的. 如 $a=13, b=14$ 满足定理 4 的条件，但不存在以 $(\lambda)_n+13(\lambda)_{n-1}+14(\lambda)_{n-2}$ 为色多项式的图 G，因为方程组：(i) $x+y=13, xy=14$；(ii) $x+y=13, xy=15$；(iii) $x+y=13, xy=16$；(iv) $x+y=12, xy=14$；(v) $x+y=12, xy=15$ 均无整数解，故 $(\lambda)_n+13(\lambda)_{n-1}+14(\lambda)_{n-2}$ 不在定理 3 所列七种类型之内.

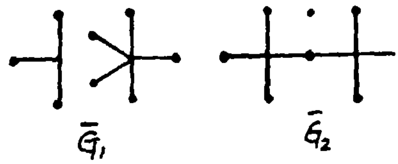

图 5　例 1 示意

2　连通性及双分图的判断

定理 5　简单图 G 的色多项式由式(1)表示，则图 G 连通的充分必要条件是

$$a_1 - a_2 + 2!a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!a_n \neq 0. \tag{2}$$

证　图 G 连通，当且仅当 $\pi_G(\lambda)$ 所含因式 λ 的幂指数为 1[2]，故 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\pi_G(\lambda)/\lambda \neq 0$，即式(2)成立.

定理 6　设 $n \geqslant 3$，图 G 是连通双分图，当且仅当其色多项式(1)中的系数 $a_2=1$.

证　因图 G 是连通双分图，故 $\chi(G)=2$，从而，$a_1=0, a_2>0$. 若 $a_2 \geqslant 2$，则 $V(\bar{G})$ 可用至少两种不同方法划分成两非空类式(3)、(4)

$$V(\bar{G}) = A \cup B, A \cap B = \varnothing, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, \tag{3}$$

$$V(\bar{G}) = C \cup D, C \cap D = \varnothing, C \neq \varnothing, D \neq \varnothing, \tag{4}$$

使导出子图 $\bar{G}[A], \bar{G}[B], \bar{G}[C], \bar{G}[D]$ 都是完全图. 记 $E=(A\cap C)\cup(B\cap D)$，$F=(B\cap C)\cup(A\cap D)$，则 $E\neq\varnothing$，否则，$A\cap C=\varnothing$，$B\cap D=\varnothing$，但 $A\cup B=C\cup D=V(\bar{G})$，故 $A\subset D$，$B\subset C$，从而 $A=D$，$B=C$，即式(3)、(4)表示同一划分. 同理，$F\neq\varnothing$. 显然，$E\cap F=\varnothing$，$E\cup F=V(\bar{G})$. 对任一 $v\in E$，当 $v\in A\cap C$，即 $v\in A$，$v\in C$ 时，在图 $\bar{G}$ 中，v 与 $A\cap D\subset A$ 的点均相邻（因 $\bar{G}[A]$ 是完全图），与 $B\cap C\subset C$ 的点也都相邻，即与 F 的点均相邻，故在图 G 中，v 与 F 的点均不相邻. 同理，当 $v\in B\cap D$ 时，v 与 F 的点也都不相邻，即 E 和 F 的点不在图 G 的同一分支中，与图 G 的连通性矛盾，得 $a_2=1$. 反之，当 $a_2=1$ 时，$a_1=0$，否则，图 G 可用一种颜色正常染色，即 G 是空图，得 $\pi_G(\lambda)=\lambda^n$. 由式(1)，令 $\lambda=1$ 得 $a_1=0$，从而

$$1 = a_2 = \lim_{\lambda\to 2}(\lambda^n - a_\lambda)/\lambda(\lambda-1) = 2^{n-1}-1,$$

即 $n=2$，与已知条件矛盾. 由 $a_2=1>0$ 得图 G 是双分图. 又 $a_1=0$，故 $a_1-a_2+2!\,a_3-\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)!a_n=-1+2!a_3+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)!a_n$ 为奇数，由定理5得图G的连通性. 证毕.

推论　（洪渊[3]）　设 $n\geqslant 3$，图 G 是连通双分图当且仅当其色多项式 $\pi_G(\lambda)=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda$ 中系数 b_1 为奇数.

证　由式(1)，得

$$b_1 = \lim_{\lambda\to 0}\pi_G(\lambda)/\lambda = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda)_n + a_{n-1}(\lambda)_{n-1} + \cdots + a_1(\lambda)/\lambda$$

$$=a_1-a_2+2!a_3-\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)!a_n.$$

当图 G 是连通双分图时，由定理 6，$a_1=0$，$a_2=1$，故 b_1 是奇数. 反之，当 b_1 是奇数时，由定理 5，图 G 是连通的. 因 $n\geqslant3$，故 $\chi(G)>1$，从而 $a_1=0$，a_2 为奇数. 若 $a_2>1$，如定理 6 的证明，将导出图 G 不连通，故 $a_2=1$. 由定理 6 得图 G 是连通双分图.

3 色多项式对图特征的描述程度

定理 7 设图 G 和 H 是点数不超过 5 的简单图. $\pi_G(\lambda)=\pi_H(\lambda)$，$\pi_{\bar{G}}(\lambda)=\pi_{\bar{H}}(\lambda)$，则 $G\cong H$.

证 由已知条件，图 G 和 H，图 $\bar{G}$ 和 $\bar{H}$ 有相同的点数，边数及分支数. 故当图 G 和 H 的点数 $n=1,2,3$ 时，定理显然成立. 当 $n=4$ 时，不妨设图 G 和 H 的边数 $e\leqslant\frac{1}{2}\binom{4}{2}=3$. 边数 $e=1$ 的任两个图同构，边数 $e=2$ 且有相同分支数的任两个图也同构. 边数 $e=3$，图及其补图均有相同分支数的任两个图同构，故定理对 4 阶图成立. 当 $n=5$ 时，直接计算 18 对互补图(其中两对互补图是自互补的，即 $G\cong\bar{G}$)的色多项式可得结论. 对点数 $n\geqslant6$ 的图，定理 7 不一定成立.

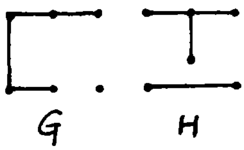

图 6 例 2 示意

例 2. 如图 6 所示的图 G 和 H 显然不同构，但是，$\pi_G(\lambda)=\pi_H(\lambda)=(\lambda)_6+11(\lambda)_5+31(\lambda)_4+22(\lambda)_3+2(\lambda)_2$，$\pi_{\bar{G}}(\lambda)=\pi_{\bar{H}}(\lambda)=(\lambda)_6+4(\lambda)_5+3(\lambda)_4$.

类似地，可证下述定理.

定理 8 设 T_1 和 T_2 是点数不超过 7 的树，则 $T_1\cong T_2$，当且仅当 $\pi_{\bar{T}_1}(\lambda)=\pi_{\bar{T}_2}(\lambda)$当点数$\geqslant8$ 时，定理 8 不一定成立.

例 3. 如图 7 所示的树 T_1 和 T_2 显然不同构，但是 $\pi_{\bar{T}_1}(\lambda)=\pi_{\bar{T}_2}(\lambda)=(\lambda)_8+7(\lambda)_7+9(\lambda)_6$.

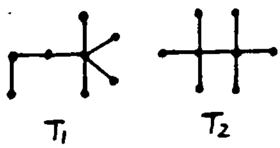

图 7 例 3 示意

4 若干问题

由上一节的两个例子可以看到，图及其补图的色多项式尚不足以完全描述图的特征.

问题 1. 图 G 及其补图 $\bar{G}$ 的色多项式，连同图 G 的度序列，能在多大程度上描述图 G 的特征?

问题 2. 图 G 的色多项式(1)中的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 是不是单峰序列?

在所知的色多项式中，尚没有找到反例，足以否定序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 单峰性. 对于完全双分图 $K_{m,n}$，当 $i\geqslant2$ 时，

$$a_i=\sum_{k=1}^{i-1}S(m,k)S(n,i-k),$$

其中 $S(m,k)$为第二类 Stirling 数[1]

$$S(m,k)=\sum_{t=1}^{k}(-1)^{(k-t)}\binom{k}{t}t^m/k!$$

故

$$a_i=\sum_{k=1}^{i-1}\sum_{t=1}^{k}\sum_{s=1}^{i-k}(-1)^{i-t-s}\binom{k}{t}\binom{i-k}{s}t^m s^n/k!(i-k)!$$

$$=\sum_{t=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{i-t}\sum_{k=t}^{i-s}\binom{i-s-t}{k-t}(-1)^{i-t-s}t^m s^n/(i-t-s)!t!s!$$

$$=\sum_{t=1}^{i-1}\sum_{s=1}^{i-t}(-2)^{i-t-s}t^m s^n/(i-t-s)!t!s! \tag{5}$$

问题 3. 完全双分图 $K_{m,n}$的色多项式系数，即式(5)定义的序列 $a_2,a_3,\cdots,a_{m+n}$是否是单峰的？更一般地，完全 k－分图的色多项式表示成式(1)的形式，系数序列是否一定是单峰的？是否有 $a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_{[\frac{n+k+1}{2}]}$？

上述问题若能获得肯定的回答，则可以证明如下结果.

定理 9 图 G 的色多项式为式(1)，色数 $\chi(G)=k$，假设问题 3 获肯定回答，则 $1=a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_{[\frac{n+k+1}{2}]}$.

证 对图 G 的阶数 n 及边数 e 行归纳法．对 1 或 2 阶的任何简单图 G，结论显然成立. 设对所有 $n\leqslant p-1(p\geqslant 3)$阶的简单图，结论成立. 对 p 阶简单图 G，若图 G 有 $e=\binom{p}{2}$ 条边，即图 G 是完全图时，结论显然成立. 设对所有 p 阶简单图，边数 $q=e(1<e\leqslant\binom{p}{2})$时，结论成立. 对 p 阶简单图 G，若图 G 有 $e-1$ 条边时，当 G 为完全 K-分图时，结论之正确性由问题 3 之肯定回答之假设得到保证．若 G 非完全 K-分图，则存在不相邻两个项点 u、v，使图 $G_1=G+uv$ 之色数不增，即

$$\chi(G+uv)=\chi(G)=k$$

图 G_1 沿边 uv 的收缩图记为 G_2([4])，则

$$\pi_G(\lambda)=\pi_{G_1}(\lambda)+\pi_{G_2}(\lambda). \tag{6}$$

图 G_2 之色数 $k'=k$ 或 $k+1$(因图 G_2 的每一种正常染色可以以自然的方式导出图 G 的正常染色，而图 G 的每一种正常染色，赋 u、v 收缩成的新点以另一种颜色，则得图 G_2 的正常染色，故 $\chi(G)\leqslant\chi(G_2)\leqslant\chi(G)+1$). 设

$$\pi_{G_1}(\lambda)=(\lambda)_p+a'_{p-1}(\lambda)_{p-1}+a'_{p-2}(\lambda)_{p-2}+\cdots+a'_k(\lambda)_k,$$

$$\pi_{G_2}(\lambda)=(\lambda)_{p-1}+a''_{p-2}(\lambda)_{p-2}+\cdots+a''_{k'}(\lambda)_{k'},$$

$$\pi_G(\lambda)=(\lambda)_p+a_{p-1}(\lambda)_{p-1}+a_{p-2}(\lambda)_{p-2}+\cdots+a_k(\lambda)_k,$$

依归纳假设

$$1=a'_p\leqslant a'_{p-1}\leqslant a'_{p-2}\leqslant\cdots\leqslant a'_{\frac{p+k+1}{2}}, \tag{7}$$

$$1=a''_{p-1}\leqslant a''_{p-2}\leqslant\cdots\leqslant a''_{\frac{p+k'}{2}}. \tag{8}$$

由式(6)得

$$a_p=1,a_{p-1}=a'_{p-1}+1,a_{p-2}=a'_{p-2}+a''_{p-2},\cdots,a_k=a'_k+a''_k.$$

因 $k'=k$ 或 $k+1$，故$[p+k+1/2]\geqslant[p-1+k'+1/2]=[p+k'/2]$，从而，由式(7)、(8)、(9)得 $1=a_p\leqslant a_{p-1}\leqslant\cdots\leqslant a_{[(p+k+1)/2]}$. 证毕.

参 考 文 献

〔1〕 徐利治等,计算组合数学,上海科学技术出版社,(1983).
〔2〕 卡波边柯等(聂祖安译),图论的例和反例,湖南科学技术出版社,(1988).
〔3〕 田丰等,图和网络理论,科学出版社,(1989).
〔4〕 邦迪等(吴望名等译),科学出版社,(1984).

Notes on Chromatic Polynomial

Wang Zhixiong
(Department of Management Information Science)

Abstract In this paper, the author gives the necessary and sufficient condition under which several types of polynomials are the chromatic polynomials of simple graphs, and the condition that the chromatic polynomials of connected graphs and connected bigraphs must satisfy; and considers the extent to which the chromatic polynomials of graph and its complement describe the characteristic of graph; and finally, proposes some questions worthy of further inquiry.

Key words graph, chromatic polynomial, connectedness, bigraph or bipartite graph