第14卷 第4期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol. 14 №. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年10月　　(NATURAL SCIENCE)　　Oct. 1993

一类退缩抛物型方程解的性质

梁学信

(管理信息科学系)

摘要　在空间 E^{n+1} 的区域 $Q=\Omega\times(O,T)$ 考虑满足较一般结构条件的一类退缩抛物型方程(1),证明广义解的有界性,以及如果它的解在 Q 的抛物边界等于零时,必是平凡解.

关键词　退缩抛物型方程,广义解,有界性,平凡解

0　引言和基本假设

我们将在 Q 研究退缩抛物型方程

$$u_t-\Delta(|u|^m u)+B(x,t,u,\nabla u)=0,\text{在}Q \tag{1}$$

广义解的有界性,及为平凡解的条件. 其中常数 $m>0$,$Q=\Omega\times(O,T)$,Ω 是 n 维欧氏空间 E^n 的有界域,边界为 $\partial\Omega$,$T>0$ 是确定数.

在 $B=0$ 或 $B=|u|^a u$ 或 $B=B(x,u)$,前已研究其初边值问题解的存在性和解的某些性质[1]. 文[2]进一步讨论 B 还含有未知函数及其导数的情况,在较为一般的情况下,证明初边值问题整体解的存在性和衰减估计. 文[3]还讨论了广义解的极值原理. 本文先证明广义解的有界性,进而得出如果它的解在 Q 的抛物边界等于零,那么必是平凡解.

设 $0<m<1$,$B(x,t,u,\xi)$ 关于变元 $(x,t)\in\Omega\times(O,T)$ 为可测,关于 $(u,\xi))\in E^1\times E^n$ 连续,且满足结构条件

$$|B(x,t,u,\xi)|\leqslant c(x,t)|\xi|^\beta+d(x,t)|u|^{\alpha-1}+f(x,t), \tag{2}$$

其中 $\beta_0<\beta<2$,$\beta_0=(n+2+nm)/(n+2-m)=2(q-1)/(q-m)$,$q\leqslant\alpha\leqslant l$,$l=m+2+(4/n)$,$q=(2(n+2)+nm)/(n+2)$.

$$c(x,t)\in L^r(Q),\begin{cases}\dfrac{1}{r}=1-\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{1-m\beta/2}{l}, & \text{当}\ \beta_0<\beta<\beta_1=\dfrac{2(l-1)}{l-m},\\ r=\infty, & \text{当}\ \beta=\beta_1,\\ \dfrac{1}{r}<1-\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{1}{l}, & \text{当}\ \beta_1<\beta<2,\end{cases} \tag{3}$$

本文1992—10—15收到.

$$d(x,t)\in L^{r_1}(Q),\begin{cases}\dfrac{1}{r_1}<1-\dfrac{\alpha}{l}, & \text{当 } q\leqslant\alpha<l,\\ r_1=\infty, & \text{当 } \alpha=l,\end{cases} \tag{4}$$

$$f(x,t)\in L^s(Q),s>\frac{n+2}{2}. \tag{5}$$

定义 称 $u(x,t)$ 是方程(1)的广义解,如果

$|u|^m u\in L^\infty(0,T,L^{2/(m+1)}(\Omega))\cap L^2(0,T,W_2^1(\Omega))$,(当 $\beta_0<\beta\leqslant\beta_1$),

$|u|^m u\in L^\infty(0,T,L^{2/(m+1)}(\Omega))\cap L^2(0,T,W_2^1(\Omega))\cap L^{t^*/(m+1)}(Q)$(当 $\beta_1<\beta<2$),

$\frac{n}{n+2}(1-\frac{\beta}{2})+\frac{\beta}{2}+\frac{1}{t^*}(\beta-\frac{n+2+nm}{n+2-m})\frac{n+2-m}{n+2}+\frac{1}{r}=1.$

并且满足

$$\int_0^t\int_\Omega\{-u\varphi_t+\nabla\varphi\cdot\nabla(|u|^m u)+\varphi B(x,t,u,\nabla u)\}dxdt+\int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)|_{t=0}^{t=t}dx=0, \tag{1'}$$

$$\forall\, t\in(0,T),\varphi\in W_2^1(0,T,L^2(\Omega))\cap L^2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

1 主要结果

引理 1 设 $|u|^{\frac{m}{2}}u\in L^\infty(0,T,,L^{4/(m+2)}(\Omega))\cap L^2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$,则 $u\in L^l(Q)$,$l=m+2+\frac{4}{n}$,且存在不依赖于 u,仅依赖于 m、n 的常数 $C>0$,使

$$\|u\|_{L^l(Q)}^q\leqslant c\{\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega|u|^2dx+\int_0^T\int_\Omega|\nabla(|u|^{\frac{m}{2}}u)|^2dxdt\}, \tag{6}$$

其中 $q=(m+2+4/n)/(1+2/n)$.

证 记 $v=|u|^{\frac{m}{2}}u$,用 Hölder 不等式和嵌入定理,有

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u|^l dx&=\int_\Omega|v|^{2(1+\frac{4}{n(m+2)})}dx\\&\leqslant(\int_\Omega|v|^{\frac{2n}{n-2}}dx)^{1-\frac{2}{n}}(\int_\Omega|v|^{\frac{4}{m+2}}dx)^{\frac{2}{n}}\\&\leqslant c(\int_\Omega|v|^{\frac{4}{m+2}}dx)^{\frac{2}{n}}\int_\Omega|\nabla v|^2dx\end{aligned}$$

再用 Young 不等式,得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^l(Q)}^l&\leqslant c(\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega|v|^{\frac{4}{m+2}}dx)^{\frac{2}{n}}\int_0^T\int_\Omega|\nabla v|^2dxdt\\&\leqslant c^{1+\frac{2}{n}}\{\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega|v|^{\frac{4}{m+2}}dx)+\int_0^T\int_\Omega|\nabla v|^2dxdt\}^{1+2/n}.\end{aligned}$$

将 v 换回到 u 便得结论.类似地可证

引理 2 设 $u\in L^\infty(0,T,L^\lambda(\Omega)\cap L^p(0,T\cdot\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega))$,则 $u\in L^{l_1}(Q)$,且存在不依赖于 u,仅依赖于 n、λ、p 的常数 $C>0$,使

$$\|u\|_{L^{l_1}(Q)}^{q_1}\leqslant c\{\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega|u|^\lambda dx+\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^p dxdt\}, \tag{7}$$

其中 $l_1=p(1+\lambda/n)$，$q_1=p(n+\lambda)/(n+p)$，$p>1$，$\lambda>1$.

定理 1　设条件(2)—(5)满足，u 是式(1)的广义解，如果存在 $M>0$，使

$$(u-M)^+=0,\qquad 在\ \partial\Omega\times(0,T)\cup\Omega\times\{0\},\tag{8}$$

那么，$\operatorname{vrai}\max\limits_{Q} u^+<\infty$.

证　设 $k\geqslant M$，用 k 代 M，式(8)仍成立. 设 u_t 存在(否则用 u 关于 t 的平均取代 u，经过极限过程便可得到下面的结果)，取 $\varphi=(u-k)^+$ 作试验函数，代入(1′)，分部积分，并利用结构条件(2)得

$$\begin{aligned}O&=\int_0^t\int_\Omega\{(u-k)^+u_t+\nabla(u-k)^+\cdot\nabla(|u|^m u)+(u-k)^+B(x,t,u,\nabla u)\}dxdt\\&\geqslant\frac{1}{2}\int_\Omega(u-k)^{+2}dx+(m+1)\int_0^t\int_\Omega u^m|\nabla(u-k)^+|^2dxdt\\&\quad-\int_0^t\int_\Omega\{(u-k)^+[c(x,t)|\nabla u|^\beta+d(x,t)|u|^{\alpha-1}+f(x,t)]dxdt.\end{aligned}\tag{9}$$

记 $|||(u-k)^+|||_Q=\operatorname{vrai}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega(u-k)^{+2}dx+\int_0^T\int_\Omega u^m|\nabla(u-k)^+|^2dxdt$，那么，根据引理 1 有

$$\begin{aligned}\|(u-k)^+\|^q_{L^q(Q)}&\leqslant c\{\operatorname{vrai}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega(u-k)^{+2}dx+\int_0^T\int_\Omega|\nabla(u-k)^{+\frac{m+2}{2}}|^2dxdt\}\\&\leqslant c\,|||(u-k)^+|||_Q.\end{aligned}$$

由式(9)得

$$|||(u-k)^+|||_Q\leqslant c\iint_{A(k)}(u-k)[c(x,t)|\nabla u|^\beta+d(x,t)u^{\alpha-1}+f(x,t)]dxdt,\tag{10}$$

$C>0$ 与 u,k,Q 无关，$A(k)=Q\cap\{u>k\}$.

用 Hölder 不等式及条件(3)，当 $\beta_0<\beta\leqslant\beta_1$ 时

$$\begin{aligned}&\iint_{A(k)}(u-k)c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt\\&\leqslant\|c(x,t)\|_{L^r(Q)}\|\nabla(u^{\frac{m+2}{2}})\|^{\beta}_{L^2(A(k))}\|u-k\|^{1-m\beta/2}_{L^l(A(k))}\\&\leqslant c\|c(x,t)\|_{L^r(Q)}|||(u-k)^+|||_Q\|u\|^{\frac{\beta}{2}(q-m)-(q-1)}_{L^l(A(k))}.\end{aligned}\tag{11}$$

根据 $\beta>\beta_0$ 的假设，知 $\frac{\beta}{2}(q-m)-(q-1)>0$. 由于 $k\to\infty$ 时，$|A(k)|\leqslant k^{-l}\iint_Q|u|^l dxdt\to 0$，从而由 Lebesque 积分的绝对连续性得 $k\to\infty$时，$\|u\|^{\frac{\beta}{2}(q-m)-(q-1)}_{L^l(A(k))}\to 0$. 因此可确定 k_0 充分大，当 $k\geqslant k_0$ 时，由式(10)，(11)得

$$|||(u-k)^+|||_Q\leqslant c\iint_{A(k)}(u-k)[d(x,t)u^{\alpha-1}+f(x,t)]dxdt,\tag{12}$$

当 $\beta_1<\beta<2$ 时，由于

$$\begin{aligned}&\iint_{A(k)}(u-k)c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt\\&\leqslant\|c(x,t)\|_{L^r(Q)}\|(u-k)\|^{q(1-\frac{\beta}{2})}_{L^l(A(k))}\|(u-k)\|^{\frac{\beta}{2}(q-m)-(q-1)}_{L^{l^*}(A(k))}\|\nabla(u^{\frac{m+2}{2}})\|^{\beta}_{L^2(A(k))}\\&\leqslant c\|c(x,t)\|_{L^r(Q)}|||(u-k)^+|||_Q\|u\|^{\frac{\beta}{2}(q-m)-(q-1)}_{L^{l^*}(A(k))}.\end{aligned}\tag{11′}$$

同理知式(12)也成立，其中常数 C 与 u,k,Q 无关，因

$$\iint_{A(k)}(u-k)d(x,t)u^{\alpha-1}dxdt\leqslant c\iint_{A(k)}d(x,t)[(u-k)^\alpha+k^\alpha]dxdt\leqslant$$

$$\leqslant c\|d(x,t)\|_{L^{r_1}(Q)}[\|(u-k)^+\|^{\frac{a}{q}}_{L^l(A(k))}|A(k)|^{1-\frac{1}{r_1}-\frac{a}{l}}+k^a|A(k)|^{1-\frac{1}{r_1}}, \tag{13}$$

$$\iint_{A(k)}(u-k)f(x,t)dxdt\leqslant\|f(x,t)\|_{L^s(Q)}\|(u-k)^+\|_{L^l(A(k))}|A(k)|^{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{s}}. \tag{14}$$

将式(13),(14)代入式(12),根据 $\alpha\geqslant q$, $|A(k)|\to0(k\to\infty)$,并用引理1得

$$(\iint_{A(k)}(u-k)^l dxdt)^{q/l}\leqslant c[k^a|A(k)|^{1-\frac{1}{r_1}}+(\|f(x,t)\|_{L^s(Q)}|A(k)|^{1-\frac{1}{l}-\frac{1}{s}})^{\frac{q}{q-1}}]$$

从而

$$\iint_{A(k)}(u-k)dxdt\leqslant(\iint_{A(k)}(u-k)^l dxdt)^{1/l}|A(k)|^{1-\frac{1}{l}}$$

$$\leqslant c\{k^{1+l\tau_0}|A(k)|^{1+\tau_1}+F|A(k)|^{1+\tau_2}\}, \tag{15}$$

其中记 $F=\|f(x,t)\|^{1/(q-1)}_{L^s(Q)}$, $\frac{\alpha}{q}=1+l\tau_0$,因 $\alpha\geqslant q$,所以 $\tau_0\geqslant0$.

$$\tau_1=\frac{1}{q}(1-\frac{1}{r_1})-\frac{1}{l}>\frac{\alpha}{lq}-\frac{1}{l}=\tau_0\geqslant0,$$

$$\tau_2=\frac{1}{q-1}(1-\frac{1}{l}-\frac{1}{s})-\frac{1}{l}$$

$$=\frac{1}{q-1}(1-\frac{1}{s}-\frac{q}{l})=\frac{1}{q-1}(1-\frac{1}{s}-\frac{n}{n+2})>0.$$

设 $\sigma=\min(\tau_1,\tau_2)$,并不妨认为 $k\geqslant k_0\geqslant1$, $|A(k)|<1$,那么当 $\sigma=\tau_2\leqslant\tau_1$ 时,由式(15)得

$$\iint_{A(k)}(u-k)dxdt\leqslant c\{k^{1+l\tau_1}|A(k)|^{1+\tau_1}+F|A(k)|^{1+\tau_2}\}$$

$$\leqslant c\{k^{1+l\tau_2}|A(k)|^{1+\tau_2}(\iint_{A(k)}|u|^l dxdt)^{\tau_1-\tau_2}+F|A(k)|^{1+\tau_2}\}$$

$$\leqslant c(k^{1+l\sigma}+F)|A(k)|^{1+\sigma}$$

$$\leqslant c(1+F)k^{1+l\sigma}|A(k)|^{1+\sigma}\overset{记}{=}\Lambda k^{1+l\sigma}|A(k)|^{1+\sigma}. \tag{16}$$

当 $\sigma=\tau_1\leqslant\tau_2$ 时,式(16)显然成立.

记 $\psi(k)=\iint_{A(k)}(u-k)dxdt=\int_k^\infty|A(z)|dz$,则 $\psi'(k)=-|A(k)|$,式(16)成为

$$(\Lambda k^{1+l\sigma})^{-1/(1+\sigma)}\leqslant-(\psi(k))^{-1/(1+\sigma)}\psi'(k). \tag{17}$$

考虑到 $k_\infty=\mathrm{vrai}\max_Q u^+$(不排除 $k_\infty=\infty$)时,$\psi(k_\infty)=0$,不妨设 $k_\infty>k_0$,将式(17)从 k_0 到 k_∞ 积分,并用式(16),得下式或式(18)

$$k_0^{-(l-1)\sigma/(1+\sigma)}-k_\infty^{-(l-1)\sigma/(1+\sigma)}\leqslant(l-1)\Lambda^{1/(1+\sigma)}(\psi(k_0))^{\sigma/(1+\sigma)}$$

$$\leqslant(l-1)\Lambda k_0^{\sigma(1+l\sigma)/(1+\sigma)}|A(k_0)|^\sigma,$$

$$k_\infty^{-(l-1)\sigma/(1+\sigma)}\geqslant k_0^{-(l-1)\sigma/(1+\sigma)}[1-(l-1)\Lambda k_0^{l\sigma}|A(k_0)|^\sigma], \tag{18}$$

因 $|A(k_0)|\to0(k_0\to\infty)$ 及 Lebesque 积分的绝对连续性,有

$$k_0^{l\sigma}|A(k_0)|^\sigma\leqslant(\iint_{A(k_0)}|u|^l dxdt)^\sigma\to0(k_0\to\infty),$$

所以只要取 k_0 充分大,可使式(18)右边严格大于零.因此 $\mathrm{vrai}\max_Q u^+<\infty$.

如果将定理 1 的条件(7)改为$(|u|-M)^+=0$,在 $\partial\Omega\times(O,T)\cup\Omega\times\{0\}$. 那么以$(-u)$代 u,重复以上证明,综合得$\operatorname{vrai}\max\limits_Q|u|<\infty$.

定理 2　设条件(2),(3),(5)满足,$d(x,t)=0$,u 是式(1)的广义解,且在 $\partial\Omega\times(O,T)\cup\Omega\times\{0\}$,$u=0$,及$|u|\leqslant M<\infty$,则存在只依赖于 $n,s,\beta,M,\|c(x,t)\|_{L^r(Q)}$的常数 $C>0$,使

$$\|u\|_{L^\infty(Q)}\leqslant C|Q|^\tau\|f(x,t)\|_{\frac{1}{L^{q-1}(Q)}},\tau=\frac{1}{q-1}(1-\frac{1}{s}-\frac{q}{l}).$$

证　设$k\geqslant0$,那么在 $\partial\Omega\times(O,T)\cap\Omega\times\{0\}$有$(u-k)^+=0$,取 $\varphi=(u-k)^{+^{(1-m)}}$作试验函数代入式(1),分部积分,并利用结构条件(2)得

$$\begin{aligned}&\operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega|(u-k)^+|^{2-m}dx+\iint_\Omega|\nabla(u-k)^+|^2dxdt\\&\leqslant c\iint_{A(k)}(u-k)^{1-m}[c(x,t)|\nabla u|^\beta+f(x,t)]dxdt\\&\leqslant c[M^{1-m-r}\iint_{A(k)}(u-k)^\gamma c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt+I(k)]\\&\leqslant c[\iint_{A(k)}(u-k)^\gamma c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt+I(k)],\end{aligned}\tag{19}$$

其中,C 还依赖 M,$\gamma=q_1(1-\frac{\beta}{2})<\frac{2(n+2-m)}{n+2}(1-\frac{\beta_0}{2})=1-m$,$q_1=\frac{2(n+2-m)}{n+2}$.

$$I(k)=\iint_{A(k)}(u-k)f(x,t)dxdt.$$

记

$$|||(u-k)^+|||_{2-m,2,Q}=\operatorname*{vrai\,max}_{0\leqslant t\leqslant T}\int_\Omega|(u-k)^+|^{2-m}dx+\iint_\Omega|\nabla(u-k)^+|^2dxdt$$

则由式(19)得

$$|||(u-k)^+|||_{2-m,2,Q}\leqslant c[\iint_{A(k)}(u-k)^\gamma c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt+I(k)],\tag{20}$$

再取 $\varphi=[(u-k)^+-(u-h)^+]^{1-m}(h>k\geqslant0)$代入式(1′),分部积分得

$$\iint_{A(k)}\{\varphi u_t+(1+m)\nabla\varphi\cdot u^m\nabla u+\varphi B(x,t,u,\nabla u)\}dxdt=0\tag{21}$$

其中

$$\iint_{A(k)}\varphi u_tdxdt=\iint_{\{k<u<h\}}(u-k)^{1-m}u_tdxdt+\iint_{\{u>h\}}(h-k)^{1-m}u_tdxdt.\tag{22}$$

记

$$\bar u=\begin{cases}h,u\geqslant h,\\u,k<u<h,\\k,u\leqslant k,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}&\iint_{\{k<u<h\}}(u-k)^{1-m}u_tdxdt=\int_0^t\int_\Omega(\bar u-k)^{1-m}\bar u_tdxdt\\&=\frac{1}{2-m}\int_\Omega(\bar u-k)^{2-m}|_{t=0}^{t=t}dx=\frac{1}{2-m}\int_\Omega(\bar u-k)^{2-m}dx=\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2-m}\left(\int_{\Omega\cap\{k<u<h\}}(u-k)^{2-m}dx+\int_{\Omega\cap\{u>h\}}(u-k)^{2-m}dx\right). \tag{23}$$

记 $\tilde{u}=\begin{cases}u, u>h,\\ h, u\leqslant h,\end{cases}$ 则

$$\iint_{\{u>h\}}(u-k)^{1-m}u_t dxdt=\int_0^t\int_\Omega(h-k)^{1-m}\tilde{u}_t dxdt$$

$$=\int_{\Omega\cap\{u>h\}}(h-k)^{1-m}(u-h)dx\geqslant\frac{1}{2-m}\int_{\Omega\cap\{u>h\}}(h-k)^{1-m}(u-h)dx. \tag{24}$$

将式(23),(24)代入式(22),得

$$_t dxdt\geqslant\frac{1}{2-m}\left(\int_{\Omega\cap\{k<u<h\}}(u-k)^{2-m}dx+\int_{\Omega\cap\{u>h\}}(h-k)^{1-m}(u-k)dx\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{2-m}\left(\int_{\Omega\cap\{k<u<h\}}(u-k)^{2-m}dx+\int_{\Omega\cap\{u>h\}}(h-k)^{2-m}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2-m}\int_\Omega[(u-k)^+-(u-h)^+]^{2-m}dx, \tag{25}$$

又

$$\iint_{A(k)}\nabla\varphi\cdot u^m\nabla u dxdt$$

$$=\iint_{A(k)}(1-m)[(u-k)^+-(u-h)^+]^{-m}u^m\nabla[(u-k)^+-(u-h)^+]\cdot\nabla u dxdt$$

$$\geqslant(1-m)\iint_{A(k)}|\nabla((u-k)^+-(u-h)^+|^2 dxdt. \tag{26}$$

将式(25),(26)代入式(21),类似于式(20)的推导,得

$$|||(u-k)^+(u-h)^+|||_{2-m,2,Q}$$

$$\leqslant C\iint_{A(k)}[(u-k)^+-(u-h)^+]^\gamma c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt, \tag{27}$$

式(20),(27)右边第一个积分,由于含有 $|\nabla u|$,所以排除 $\{u=\text{const.}\}$ 的正测度集,为简单,设 $|Q\cap\{u=\text{const.}\}|=0$.

设 $\varepsilon>0$ 待定,取 $N>0$ 足够大,使

$$\left(\iint_{Q\cap\{c(x,t)>N\}}c^r(x,t)dxdt\right)^{1/r}\leqslant\varepsilon.$$

然后逐次确定 $h_i, i=0,1,2,\cdots,m$,使 $\infty>h_0>h_1>\cdots>h_m=k$,满足 $|Q_i|=(\frac{\varepsilon}{N})^r, i=0,1,2,\cdots,m-1$, $|Q_m|\leqslant(\frac{\varepsilon}{N})^r$,其中 $Q_0=Q\cap\{u>h_0\}$, $Q_i=Q\cap\{h_i<u<h_{i-1}\}, i=1,2,\cdots,m$. 这样的 Q_i 两两不相交,因而 $m(\frac{\varepsilon}{N})^r\leqslant\sum_{i=0}^m|Q_i|\leqslant|Q|$,说明 m 有限,且可由 ε 界定,置 $u_0=(u-h_0)^+$, $u_i=(u-h_i)^+-(u-h_{i-1})^+, i=1,2,\cdots,m$. 则由式(20),(27)得

$$|||u_0|||_{2-m,2,Q}\leqslant c\left[\iint_{A(h_0)}u_0^\gamma c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt+I(k)\right], \tag{28}$$

$$|||u_i|||_{2-m,2,Q}\leqslant c\left[\iint_{A(h_i)}u_i^\gamma c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt+I(k)\right], i=1,2,\cdots,m. \tag{29}$$

因

$$\nabla u_i=\begin{cases}\nabla u, 在 Q_i,\\ 0, 在 Q\backslash Q_i,\end{cases}$$

几乎处处成立，且在 $A(h_i)$ 上有

$$|\nabla u|^\beta=|\nabla(u-h_i)^+|^\beta=|\nabla\sum_{j=0}^{i}u_j|^\beta\leqslant 2^\beta(|\nabla u_i|^\beta+|\nabla\sum_{j=0}^{i-1}u_j|^\beta)$$

$$\leqslant 2^\beta|\nabla u_i|^\beta+(2m)^\beta\sum_{j=0}^{i-1}|\nabla u_j|^\beta.$$

所以

$$\|\!| u_i |\!\|_{2-m,2,Q}$$

$$\leqslant 2^\beta c\iint_{Q_i}u_i^\gamma c(x,t)|\nabla u_i|^\beta dxdt+(2m)^\beta c\sum_{j=0}^{i-1}\iint_{A(h_i)\cap Q_j}u_i^\gamma c(x,t)|\nabla u|^\beta dxdt+cI(k).\quad(30)$$

因

$$\|c(x,t)\|_{L^r(Q_i)}\leqslant(\iint_{Q\cap\{c(x,t)>N\}}c^r(x,t)dxdt)^{1/r}+N|Q_i|^{1/r}\leqslant 2\varepsilon.$$

所以，用 Hölder 不等式及引理 2 得

$$2^\beta c\iint_{Q_i}u_i^\gamma c(x,t)|\nabla u_i|^\beta dxdt$$

$$\leqslant 2^\beta c\|c(x,t)\|_{L^r(Q_i)}\|u_i\|_{L^{l_1}(Q_i)}^\gamma\|\nabla u_i\|_{L^2(Q_i)}^\beta|Q_i|^{1-\frac{1}{r}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{l_1}}$$

$$\leqslant 2^{\beta+1}c\varepsilon\,\|\!| u_i |\!\|_{2-m,2,Q}|Q_i|^{1-\frac{1}{r}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{l_1}}$$

$$\leqslant 2^{\beta+1}c\varepsilon(\frac{\varepsilon}{N})^{1-\frac{1}{r}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{l_1}}\|\!| u_i |\!\|_{2-m,2,Q}$$

其中 $l_1=2(1+\frac{2-m}{n})$. 因 $1-\frac{1}{r}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{l_1}=\frac{1}{l}[(1-\frac{m\beta}{2})-q(1-\frac{\beta}{2})]>\frac{1}{l}[(1-q)+\frac{\beta_0}{2}(q-m)]=0$，所以，如果一开始取

$$2^{\beta+1}c\varepsilon(\frac{\varepsilon}{N})^{1-\frac{1}{r}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{l_1}}\leqslant\frac{1}{2},\quad(31)$$

那么，由式(30)，并用引理 2 得

$$\|\!| u_i |\!\|_{2-m,2,Q}\leqslant c\{\sum_{j=0}^{i-1}\iint_{A(h_i)\cap Q_j}c(x,t)u_i^\gamma|\nabla u_j|^\beta dxdt+I(k)\}$$

$$\leqslant C\|c(x,t)\|_{L^r(Q_j)}\|u_i\|_{L^{l_1}(Q_j)}^\gamma\sum_{j=0}^{i-1}\|\nabla u_j\|_{L^2(Q_j)}^\beta|Q_j|^{1-\frac{1}{r}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{l_1}}+CI(k)$$

$$\leqslant C\|u_i\|_{2-m,2,Q}^{1-\frac{\beta}{2}}\sum_{j=0}^{i-1}\|u_j\|_{2-m,2,Q}^{\frac{\beta}{2}}\quad.$$

据此，再用 Young 不等式得

$$\|\!| u_i |\!\|_{2-m,2,Q}\leqslant c\{\sum_{j=0}^{i-1}\|\!| u_j |\!\|_{2-m,2,Q}+CI(k),\quad(32)$$

由式(31)知 ε 与 Q 无关，从而 m 也与 Q 无关.

同理，由式(28)有

$$\|\!| u_0 |\!\|_{2-m,2,Q}\leqslant CI(k),\quad(33)$$

式(32)，(33)中的常数 C 与 k,Q 无关.

利用式(32)，(33)逐次迭代，由于 m 有限，得

$$|||\, u_i \,|||_{2-m,2,Q} \leqslant CI(k), i = 0,1,2,\cdots,m, \tag{34}$$

C 与 k,Q 无关．根据引理 2，由式(34)继续得

$$\|(u-k)^+\|^{q_1}_{L^{l_1}(Q)} \leqslant C\,|||\,(u-k)^+\,|||_{2-m,2,Q} = C\,|||\sum_{j=0}^{m} u_j\,|||_{2-m,2,Q}$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{m}\|u_j\|_{2-m,2,Q} \leqslant CI(k) = c\iint_{A(k)}(u-k)^{1-m}f(x,t)dxdt$$

$$\leqslant C\|f(x,t)\|_{L^s(Q)}\|(u-k)^+\|^{1-m}_{L^{l_1}(Q)}|A(k)|^{1-\frac{1}{s}-\frac{1-m}{l_1}},$$

所以

$$\|(u-k)^+\|_{L^{l_1}(Q)} \leqslant C(\|f(x,t)\|_{L^s(Q)}|A(k)|^{1-\frac{1}{s}-\frac{1-m}{l_1}})^{\frac{1}{q_1(1-m)}}.$$

从而

$$\iint_{A(k)}(u-k)dxdt \leqslant \|(u-k)^+\|_{L^{l_1}(Q)}|A(k)|^{1-\frac{1}{l_1}} \leqslant C\|f(x,t)\|^{\frac{1}{q_1(1-m)}}_{L^s(Q)}|A(k)|^{1+\tau}.$$

由此便得

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leqslant C\|f(x,t)\|^{\frac{1}{q-1}}_{L^s(Q)}\ |A(k)|^{\tau}.$$

其中

$$\frac{1}{q_1(1-m)} = \frac{1}{q-1},$$

$$\tau = (1-\frac{1}{s}-\frac{1-m}{l_1})\frac{1}{q_1(1-m)} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{q-1}(1-\frac{1}{s}-\frac{q}{l}).$$

定理 3 设 u 是式(1)的广义解，条件(2)—(4)满足，$f(x,t)=0$，$|u|^m u \in L^2(0,T,\overset{0}{w}{}^1_2(\Omega))$，且 $u(x,0)=0$，那么，u 必是平凡解．

证 根据定理 1，u 在 Q 有界，设 $|u| \leqslant M$. 把 $d(x,t)|u|^{\alpha-1}$ 看成 $f(x,t)$. 如果 $|Q|$ 足够小，使

$$CM^{\frac{\alpha-q}{q-1}}\|d(x,t)\|^{\frac{1}{q-1}}_{L^{r_1}(Q)}|Q|^{\tau+\frac{1}{q-1}(1-\frac{1}{s}-\frac{1}{r_1})} < 1,$$

$$\tau = \frac{1}{q-1}(\frac{1}{s}-\frac{q}{l})$$

为定理 2 中的 τ. 那么，由定理 2 得

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leqslant C|Q|^{\tau}\|u\|^{\frac{\alpha-1}{q-1}}_{L^\infty(Q)}\|d(x,t)\|^{\frac{1}{q-1}}_{L^s(Q)}$$

$$\leqslant C|Q|^{\tau}M^{\frac{\alpha-1}{q-1}-1}\|d(x,t)\|^{\frac{1}{q-1}}_{L^s(Q)}\|u\|_{L^\infty(Q)}$$

$$\leqslant CM^{\frac{\alpha-q}{q-1}}\|d(x,t)\|^{\frac{1}{q-1}}_{L^{r_1}(Q)}|Q|^{\tau+\frac{1}{q-1}(\frac{1}{s}-\frac{1}{r_1})}\|u\|_{L^\infty(Q)} < \|u\|_{L^\infty(Q)}.$$

因此 $\|u\|_{L^\infty(Q)}=0$，现用 $\Omega\times(0,t_0)$ 取代 Q，那么只要 t_0 足够小，由上面所证有 $\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(0,t_0))}=0$，然后用 t_0 取代 $t=0$，重复以上证明，经过有限步骤，即可得 $\|u\|_{L^\infty(Q)}=0$.

参 考 文 献

〔1〕 Nakao, M, *Nonlinear Analysis*, 10, 3(1986), 299—314.

〔2〕 吴在德、梁学信等，应用数学，4，4(1991)，98—106.

〔3〕 梁学信，华侨大学学极(自然科学版)，12，4(1991)，405—415.

The properties of the solutions to One Class of Degenerate parabolic Equations

Liang Xuexin

(*Department of Mangement Information Science*)

Abstract At the region $Q = \Omega \cdot (O,T)$ in the space E^{n+1}, the author considers one class of degenerate parabolic equations satisfying rather general structural conditions. The boundedness of generalized solutions is demonstrated. It is also demonstrated that the solution must be trivial solution if the solution vanishes at the parabolic boundary of Q.

Key words degenerate parabolic equation, generalized solution, boundedness, trivial solution