

# 梯形肋片端部第三类边界条件的换热研究

何宏舟 杨翔翔

(化工与生化工程系)

**摘要** 应用 Haper-Brown 假定,将原属于梯形肋片第三类边界条件的换热问题,转化为第二类边界条件的换热问题即绝热边界问题求解.根据 Frobenius 方法对所求得的控制微分方程式进行解析解,并用四阶 Runge-Kutta 方法结合 Newton-Raphson 方法求得问题的数值解,对上述两种求解结果进行了比较.

**关键词** 肋片,边界条件,解析解,数值解

## 0 引言

迄今为止,已有许多学者对肋片传热的机理作了研究<sup>[1-2]</sup>,其中绝大部分是假定肋片端部处于第二类换热边界条件,即肋片端部是绝热的情况.然而,只要有对流存在且肋端非奇异,那么端部与周围环境之间便不可能没有热交换.对于常用的梯形肋片而言,当倾角  $\alpha$  很小,对流换热系数  $h$  与毕奥数  $Bi$  也较小时,如能找到某种方法,把肋片端部处于对流换热的情况转化为端部是绝热的情况,则可更加便于分析计算.对于这个问题,还未见有文献介绍过.本文拟以梯形肋片为例,对这个问题进行探讨,这样可为处理不同边界条件的肋片传热研究提供借鉴和参考.

$$q_x = k \cdot y \cdot \frac{dT}{dx}, \quad q_{x+dx} = k \cdot y \cdot \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}(k \cdot y \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot dx, \quad q_h = h \cdot (T - T_a) \cdot \frac{dx}{\cos\alpha}$$

## 1 主控微分方程式的导出

梯形肋片的传热模型如图1所示.对此传热模型,作如下假定:(1)一维稳态传热;(2)定热特性参数  $h, k$ ;(3)肋根温度  $T_b$  为定值;(4)端部为第三类换热边界条件,即对流换热条件.依图所示的热流方向,由 Fourier 定律有由能量平衡关系式  $q_{x+dx} = q_x + q_h$ ,可得控制微分方程式

本文1992-04-08收到.

为

$$\frac{d}{dx}(k \cdot y \cdot \frac{dT}{dx}) \cdot dx - h(T - T_a) \cdot \frac{dx}{\cos \alpha} = 0,$$

整理后得

$$y \cdot \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} - \frac{h \cdot (T - T_a)}{k \cdot \cos \alpha} = 0, \quad (1)$$

式中  $y = b/2 - (L-x) \cdot \text{tga}$ . 边界条件是

$$x = 0, \quad k \cdot \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = h \cdot (T - T_a), \quad x = L, \quad T = T_b.$$

依照 Haper-Brown 假定, 可以虚拟一增长梯形肋, 肋高为  $\Delta L$ , 如图1中虚线所示, 使得通过原肋端部的对流换热量等于虚设的增长肋

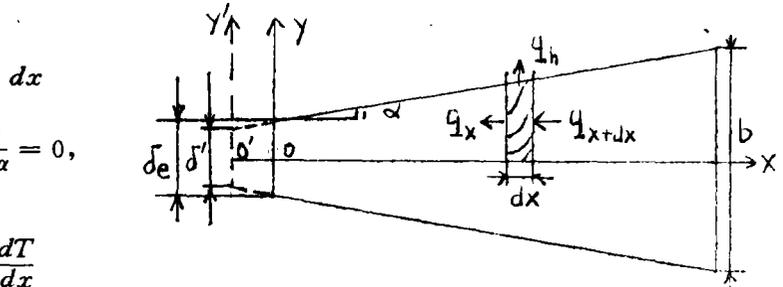


图1 梯形肋片传热的示意图

的两侧表面的对流换热量. 这样, 通过增长肋的端部的热流为零. 令

$\theta = (T - T_a) / (T_b - T_a)$ . 同时假定增长肋的温度均匀一致且与原肋尖的温度相同, 即  $\theta_e = \theta_b$ . 由能量守恒关系, 参见图2所示, 有

$$h \cdot w \cdot \delta_e \cdot \theta_e = 2 \cdot \frac{\Delta L}{\cos \alpha} \cdot w \cdot h \cdot \theta_e + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\delta_e + \delta) \cdot \Delta L \cdot h \cdot \theta_e. \quad (2)$$

根据一般工程实际情况, 有  $W \gg \delta_e, L \gg b, \alpha$  很小,  $\cos \alpha \cong 1$ . 整理式(2), 可得  $\Delta L \cong \frac{\delta_e}{2}$ . 这样, 对高为  $L$  的梯形肋片端部处于第三类换热边界条件的问题的求解便可转化为对高为  $L + \delta_e/2$  的梯形肋片端部处于第一类换热边界条件的问题的求解.

应用 Haper-Brown 变换后, 肋片导热的控制微分方程式仍是

$$y \cdot \frac{d^2\theta}{d\mu^2} + \frac{dy}{d\mu} \cdot \frac{d\theta}{d\mu} - \frac{h(T - T_a)}{k \cdot \cos \alpha} \theta = 0, \quad (1')$$

只是这时的坐标轴起点为  $O'$ , 如图1所示. 其中,  $y = \frac{\delta_e}{2} + (x - \frac{\delta_e}{2}) \cdot \text{tga}$ . 不妨设

$$\mu^2 = \varnothing^2 \cdot \left[ x + \frac{\delta_e \cdot (1 - \text{tga})}{2 \text{tga}} \right],$$

式中,  $\varnothing^2 = 4h / (k \cdot \sin \alpha)$ . 则有,  $y = \mu^2 / \varnothing^2 \cdot \text{tga}, dx = 2\mu \cdot d\mu / \varnothing^2, \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{\varnothing^2}{2\mu} \cdot \frac{d\theta}{d\mu}$  于

对于环形肋片而言, 该项为零.

是,控制微分方程式(1)'可转化为

$$\frac{d^2\theta}{d\mu^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\theta}{d\mu} - \theta = 0. \quad (3)$$

边界条件是

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \theta \Big|_{x=L+\frac{\delta}{2}} = \theta_b.$$

转化成  $\mu$  的表达式,即是

$$\frac{d\theta}{d\mu} \Big|_{\mu|x=0} = 0, \quad \theta \Big|_{\mu|x=L+\frac{\delta}{2}} = \theta_b.$$

## 2 问题的解析解

方程式(3)是一个修正的 Bessel's 方程,可采用 Frobenius 方法求解[3]. 为书写方便起见,方程式(3)同解于方程式

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0 \quad (x \neq 0). \quad (4)$$

对于式(4),令

$$y = x^t \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) x^i = A_0 x^t + A_1 x^{t+1} + \dots$$

则

$$\frac{dy}{dx} = s \cdot A_0 x^{t-1} + A_1 \cdot (s+1)x^t + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t+s)x^{t+i-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t+s)(t+s-1)x^{t+i-2},$$

$$xy = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(s)x^{t+i+1},$$

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (t+s)(t+s-1)x^{t+i-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} & x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (t+s)(t+s-1) \cdot A_i x^{t+i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t+s)x^{t+i-1} - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^{t+i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t+s)^2 x^{t+i+1} - \sum_{i=2}^{\infty} A_{i-2} x^{t+i-1} \\ &= A_0 \cdot s^2 \cdot x^{t-1} + A_1 \cdot (s+1)^2 \cdot x^t + \sum_{i=2}^{\infty} [A_i(t+s)^2 - A_{i-2}] \cdot x^{t+i-1} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4)'$$

式(4)'对任意的  $A_i(t)$  均成立. 于是,得同一关系式为

$$A_0 \cdot s^2 = 0, \quad A_1 \cdot (s+1)^2 = 0$$

和循环关系式为

$$A_i(t+s)^2 - A_{i-2} = 0.$$

按照 Frobenius 假定,  $A_0 \neq 0$ , 则得  $s^2 = 0$ . 把  $s^2 = 0$  代入上式可得  $A_1 = 0, A_2 = A_0/2^2, A_3 = 0, A_4 = A_0/(2^2 \cdot 4^2), \dots, A_{2n-1} = 0, A_{2n} = A_0/[2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2]$ . 则得方程式(4)的一个解为

$$\begin{aligned} y_1 &= A_0 + \frac{A_0}{2^2} x^2 + \frac{A_0}{2^2 \cdot 4^2} x^4 + \dots + \frac{A_0}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} x^{2n} + \dots \\ &= A_0 \cdot \left( 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{x^{2n}}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} \right) = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \\ &= A_0 I_0(x). \end{aligned}$$

由于  $s=0$  是重根, 方程式(4)的另一个解可由 Frobenius 方法直接给出

$$\begin{aligned} y_2 &= B_0 \cdot \left[ - \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) I_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \right] \\ &= B_0 \cdot K_0(x), \end{aligned}$$

则式(4)的通解为  $y(x) = A_0 I_0(x) + B_0 K_0(x)$ . 于是得式(3)的解为

$$\theta(\mu) = A_0 I_0(\mu) + B_0 K_0(\mu), \quad (5)$$

式中  $A_0, B_0$  由边界条件确定

$$x=0 \text{ 时, } \mu = \mu_c = \varnothing \cdot \left[ \frac{\delta_c (1 - \operatorname{tg} \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right]^{1/2}$$

$$\frac{d\theta}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_c} = A_0 I_1(\mu_c) - B_0 K_1(\mu_c) = 0, \quad (6)$$

$$x=L+\Delta L=L_c \text{ 时, } \mu = \mu_0 = \varnothing \cdot \left[ L_c + \frac{\delta_c (1 - \operatorname{tg} \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right]^{1/2}$$

$$\theta = \theta_b = A_0 I_0(\mu_0) + B_0 K_0(\mu_0). \quad (7)$$

联解式(6)、(7), 可得

$$A_0 = \theta_b \cdot \frac{K_1(\mu_c)}{I_0(\mu_0) K_1(\mu_c) + I_1(\mu_c) K_0(\mu_0)},$$

$$B_0 = \theta_b \cdot \frac{I_1(\mu_c)}{I_0(\mu_0) K_1(\mu_c) + I_1(\mu_c) K_0(\mu_0)},$$

于是最后得方程式(3)的解为

$$\theta = \theta_b \cdot \left[ \frac{K_1(\mu_c) I_0(\mu) + I_1(\mu_c) K_0(\mu)}{I_0(\mu_0) K_1(\mu_c) + I_1(\mu_c) K_0(\mu_0)} \right]. \quad (8)$$

根据本文中定义, 显然有  $\theta_b = 1$ , 则得问题的解析解为

$$\theta = \frac{K_1(\mu_c) I_0(\mu) + I_1(\mu_c) K_0(\mu)}{I_0(\mu_0) K_1(\mu_c) + I_1(\mu_c) K_0(\mu_0)} \quad (9)$$

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{K_1(\mu_c) I_0(\mu) - I_1(\mu_c) K_1(\mu)}{I_0(\mu_0) K_1(\mu_c) + I_1(\mu_c) K_0(\mu_0)} \quad (10)$$

### 3 问题的数值解

改写控制微分方程式为

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \left[ \frac{h(T - T_a)}{\cos\alpha} - k \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} \right] / [k \cdot y(x)]. \tag{11}$$

上面已定义  $\theta = (T - T_a) / (T_b - T_a)$ , 令  $\eta = 1 - \frac{x}{L}$ , 则  $\frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{L} \cdot \frac{d\theta}{d\eta}$ ,  $\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{d^2\theta}{d\eta^2}$ , 把  $y(x) = b/2 - (L-x) \cdot \text{tga}$  及上述关系式代入控制微分方程式(11), 可得

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} = \left( \frac{h \cdot L}{k} \cdot \theta + \frac{d\theta}{d\eta} \cdot \text{sina} \right) / \left( \frac{b}{2L} \cdot \cos\alpha - \eta \cdot \text{sina} \right),$$

再令  $N1 = hL/k$ ,  $N2 = \text{sina}$ ,  $N3 = (b/2L) \cdot \cos\alpha$ , 则有

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} = \frac{N1 \cdot \theta + N2 \cdot \frac{d\theta}{d\eta}}{N3 - N2 \cdot \eta}. \tag{12}$$

设  $\theta = Y$ ,  $d\theta/d\eta = Z$ , 则得一阶微分方程组为

$$F = dy/d\eta = Z,$$

$$G = \frac{dZ}{d\eta} = \frac{(N1 * Y) + (N2 * Z)}{(N3 - N2 * \eta)}. \tag{13}$$

边界条件是

$$x = L, \eta = 0, \theta = Y = 1,$$

$$x = 0, \eta = 1, \frac{d\theta}{d\eta} \Big|_{\eta=1} = -N1 * \theta. \tag{14}$$

图3写出 Runge-Kutta 方法, 结合 Newton-Raphson 方法<sup>[4-5]</sup>, 求解微分方程组(13)、(14)的计算机程序框图。

### 4 讨论与结论

应用 Haper-Brown 变换前后坐标的关系为  $x' =$

$x + \frac{\delta x}{2}$ . 其中  $x$  为变换前坐标,  $x'$  为变换后坐标. 分别取点  $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ , 则对应于变换后的坐标点为  $x' = 0.0175, 0.1175, 0.2175, 0.3175, 0.4175, 0.5175, 0.6175$ . 若取

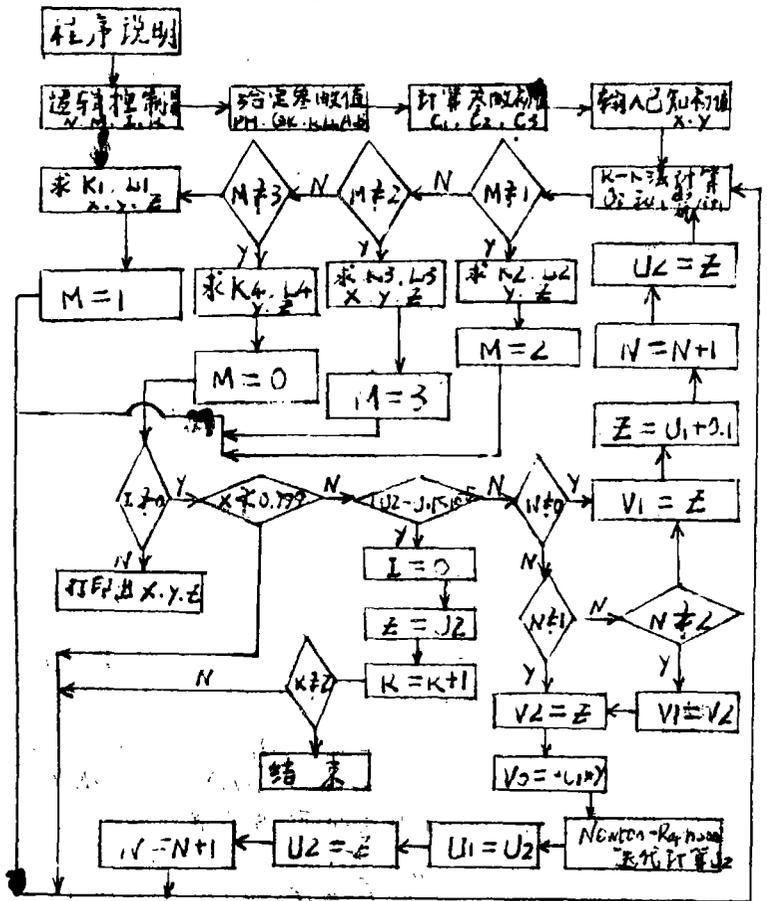


图3 程序框图

$$I_0(\mu) = 1 + \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^4}{64} + \frac{\mu^6}{64 \times 36} + \frac{\mu^8}{256 \times 576},$$

$$I_1(\mu) = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^3}{16} + \frac{\mu^5}{64 \times 6} + \frac{\mu^7}{32 \times 576},$$

$$K_0(\mu) = -(\ln \frac{\mu}{2} + \gamma)I_0(\mu) + [\frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^4}{64} \times \frac{3}{2} + \frac{\mu^6}{64 \times 36} \times \frac{11}{6} + \frac{\mu^8}{256 \times 576} \times \frac{25}{12}],$$

$$K_1(\mu) = (\ln \frac{\mu}{2} + \gamma)I_1(\mu) + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} \times [\frac{\mu}{2} + \frac{\mu^3}{16} \times \frac{5}{2} + \frac{\mu^5}{64 \times 6} \times \frac{10}{3} + \frac{\mu^7}{32 \times 576} \times \frac{47}{12}],$$

式中  $\gamma$  为欧拉常数,  $\gamma=0.5772157$ , 则根据式(10)、(11)进行计算, 结果如表1所示。

表1 解析解的结果

$x'$	$\mu$	$\theta$	$d\theta/d\mu$	$d\theta/dx'$
0.0175	0.9581	0.6992	0.02942	0.07046
0.1175	1.1734	0.7201	0.162393	0.3175
0.2175	1.3350	0.7591	0.265746	0.4500
0.3175	1.5149	0.8088	0.356296	0.5397
0.4175	1.6594	0.8662	0.440907	0.6097
0.5175	1.7924	0.9304	0.523106	0.6697
0.6175	1.9160	1.0	0.604647	0.7242

直接由方程式(1)出发, 应用 Runge-Kutta 方法结合 Newton-Raphson 方法的数值求解的结果如表2所示。

表2 数值求解的结果\*

$x$	$\eta$	$\theta$	$E_e$	$d\theta/d\eta$	$d\theta/dx$	$E'a$
0.0	1	0.6995	0.04%	-0.04198	0.06999	0.66
0.1	0.8333	0.7200	0.01%	-0.1889	0.31498	0.79%
0.2	0.6667	0.7594	0.04%	-0.26987	0.44982	0.04%
0.3	0.5000	0.8087	0.01%	-0.3234	0.5390	0.13%
0.4	0.3333	0.8658	0.046%	-0.3653	0.6089	0.13%
0.5	0.1667	0.9308	0.04%	-0.4021	0.6702	0.07%
0.6	0	1.0000	0	-0.4347	0.7245	0.04%

对照表1、2可以看出, 应用 Haper-Brown 变换转化第三类边界条件为第二类边界条件, 求解结果与直接采用数值方法求解第三类换热边界条件的结果十分相近, 最大相对误差不超过 0.8%。

\* 表中,  $E_e, E'a$  分别是  $\theta, d\theta/dx$  的数值解与解析解的相对误差。

结论 梯形肋片端部第三类换热边界条件的求解,可应用 Haper-Brown 变换转化为第二类换热边界条件求解,既方便又不致于影响其结果精度。

符号表  $b$ : 肋根宽(m),  $h$ : 对流换热系数(J/K·m<sup>2</sup>),  $k$ : 热传导系数(J/K·m),  $L$ : 肋高(m),  $\Delta L$ : 采用 Haper-Brown 假定后虚拟肋的高(m),  $T_a$ : 环境温度(K),  $T_b$ : 肋根温度(K),  $T_c$ : 肋端温度(K),  $T$ : 梯形肋片沿肋高方向任一点的温度(K),  $W$ : 肋长(m),  $\alpha$ : 梯形肋倾角,(°),  $\delta$ : 肋端宽(m).

### 参 考 文 献

- [1] Kern, D. Q. and Kraus, A. D., *Extend Surface Heat Transfer*, McGraw Hill Book Company, New York, (1972).
- [2] 杨翔翔, 热特性参数可变时变截面环肋的传热研究. 华侨大学学报, 3(1986).
- [3] Hilderbrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications* (Second Edition), Prentice Hall, INC. Englewood Cliffs, New Jersey, (1976).
- [4] 俞昌铭, 热传导及其数值分析, 清华大学出版社, (1981).
- [5] J. A. 亚当斯 和 D. F. 罗杰斯, 传热学计算机分析, 科学出版社, (1980).

## A Study on the Heat Transfer at the Tip of a Trapezoidal Fin under Boundary Condition of the Third Kind

He Hongzhou Yang Xiangxiang

(Department of Chemical and Biochemical Engineering)

**Abstract** A study is made on the heat transfer at the tip of a trapezoidal fin under the first kind boundary condition. For solving the heat transfer problem, the original third kind boundary condition is converted into that of the second kind condition by adopting Haper-Brown assumption, namely, adiabatic boundary condition. An analytic solution of governing differential equation is obtained by Frobenius method; while a numerical solution of the same problem is obtained by fourth order Runge-Kutta method combined with Newton-Raphson method. A comparison is made between the results derived from the two different ways.

**key words** fin, boundary condition, analytical solution, numerical solution.