

控制系统状态方程式的等价结构与应用*

王永初

(精密机械工程系)

摘要 控制系统状态方程式有许多不同的结构,可以互相转换以适应不同实际需要.文中推荐一种分段状态观测器,可增加状态反馈的个数,降低工业噪声与微分运算的污染度,从而提高系统的响应速度.

关键词 观测器,状态反馈,噪声污染

1 多状态控制增加系统响应速度

现代控制理论是建立在状态方程式的基础上,如同经典控制理论是建立在传递函数基础上一样.尽管如此,现代控制理论在生产过程控制中应用仍然甚少,导致人们怀疑它在生产过程应用的实际价值.状态方程式描述方法,包含系统的信息比传递函数多得多,因而必定能设计出更高水平的控制系统.这里仅以一个高阶传递函数为例

$$G(s) = 1/(10s + 1)^{10}. \quad (1)$$

工业控制系统一般采用PID调节器 $D(s)$ 组成系统,即 $D(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s)$.若取 $T_i = 20$ (时间单位), $T_D = 5$ (时间单位). T_i 与 T_D 的时间单位与式(1)、(2)的时间单位相同(均以秒为单位).根据闭环系统的衰减振荡边界条件⁽³⁾

$$\frac{K_p}{(j-m)w T_i [(j-m)w T + 1]^n} = -1, \quad (2)$$

其中 n 为开环系统的等阶阶数, $n=8$, T 为时间常数, $T=10$ s.求得系统的操作周期

$$T_i = \frac{2\pi T [1 + m \tan(180^\circ - \Phi)/n]}{\tan((180^\circ - \Phi)/n)}, \quad (3)$$

式中 Φ 为衰减迟后校正角, $\Phi = \tan^{-1}(\frac{1}{-m}) + 180^\circ$,当 $m=0.221$ 时(即衰减度对应于1/4衰减

本文1992-09-03收到.

福建省自然科学基金资助课题.

状态), $\Phi \approx 95.71^\circ$, 故有 $T_r = 400.64 \text{ s}$, 系统的调节周期 $T_s = 3 \times T_r = 1201.91 \text{ s}$. 图1的曲线(1)表示系统的仿真响应曲线. 这个结果表明高阶被控制对象, 采用 PID 的调节方式, 系统的响应速度是非常缓慢的.

为了应用状态方程式的设计方法, 将式(1)的传递函数展开成

$$G(s) = \frac{X(s)}{u(s)} = \frac{b_0}{(s^{10} + a_9 s^9 + a_8 s^8 + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}, \quad (4)$$

式中: $a_0 = b_0 = 0.1 \times 10^{-9}$, $a_1 = 0.1 \times 10^{-7}$, $a_2 = 0.45 \times 10^{-6}$, $a_3 = 0.12 \times 10^{-4}$, $a_4 = 0.21 \times 10^{-3}$, $a_5 = 0.252 \times 10^{-2}$, $a_6 = 0.21 \times 10^{-1}$, $a_7 = 0.12$, $a_8 = 0.45$, $a_9 = 1$. 并可构成如下状态方程式

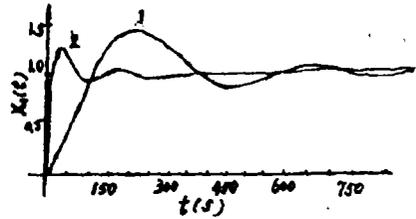


图1 两种设计方法结果的响应过程比较

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_9 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u. \quad (5)$$

按照状态反馈的设计, 可取 $u = -KX$, 其中 K 为状态反馈矩阵或向量.

为了消除控制系统的调节残余偏差, 对控制方式稍加改进, 使之具有积分的功能, 即控制函数修改成

$$u = - (1/T_i s) K X, \quad (6)$$

并取 $K = [K_1, K_2, K_3, \dots, K_9, K_{10}] = [1 \quad 0.9 \quad 0.36 \quad 0.84 \times 10^{-1} \quad 0.126 \times 10^{-1} \quad 0.126 \times 10^{-2} \quad 0.84 \times 10^{-4} \quad 0.36 \times 10^{-5} \quad 0.9 \times 10^{-7} \quad 0.1 \times 10^{-8}]$, $T_i = 10^{-9} \cdot \frac{1}{\alpha}$. 故知

$$u = - \frac{1}{T_i s} [X_1 + 0.9X_2 + 0.36X_3 + 0.84 \times 10^{-1}X_4 + 0.126 \times 10^{-1}X_5 + 0.126 \times 10^{-2}X_6 + 0.84 \times 10^{-4}X_7 + 0.36 \times 10^{-5}X_8 + 0.9 \times 10^{-7}X_9 + 0.1 \times 10^{-8}X_{10}] = - \frac{10^{-9}}{T_i s} (1 + 10s)^9 X_1 = - \frac{\alpha}{s} (1 + 10s)^9 X_1. \quad (7)$$

这就相当于将一个10阶系统, 通过控制功能的补偿, 降阶成为一个2阶的系统, 等价系统的开环传递函数为 $M(s) = \alpha/s(10s+1)$, 当 $\alpha = 0.1$ 时, 系统的振荡角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T_d}$. 在无阻尼振荡度 $\zeta = 0.5$ 的情况下, $\omega = 0.1 \text{ s}^{-1}$, 故知 $T_d = 62.8 \text{ s}$, 而调节周期 $T_s = 3T_d = 188.4 \text{ s}$. 这个结果同一般 PID 调节相比响应速度约提高6.4倍. 图1曲线2为全阶状态反馈的仿真响应曲线.

国外由于传感器技术的发展,许多人尝试开发各种状态传感器来提高控制系统的响应速度,至今应用于状态反馈的高阶传感器,由于噪声问题存在不少困难,所以现代控制理论应用于过程控制也仅局限于低阶系统,量大面广的高阶系统仍然采用传统的 PID 控制方法.这是目前控制理论应用迫切需要解决的问题.作者提议用分段观测器联合代替全状态观测器,可望解决工程控制的这个难题.

2 分段观测器及其相应状态方程式

根据状态反馈控制系统的状态方程

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad (8)$$

以及输出方程式 $y = CX$ 和控制方程式 $u = -KX$, 可求得状态反馈控制的闭环状态方程式 $\dot{X} = A X - BK X$ 在采用 kalman 预估观测器的情况下, 预估观测状态方程式为

$$\dot{X} = AZ + Bu + P(y - CZ). \quad (9)$$

定义 X 与 Z 状态的误差为 $\tilde{X} = X - Z$, 则由式(8)与式(9)可得 $\dot{\tilde{X}} = (A - PC)\tilde{X}$. 于是构成如下的增广系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}} \\ \dot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - PC & O \\ -BK & A - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ X \end{bmatrix}. \quad (10)$$

且有

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A - PC & O \\ -BK & A - BK \end{bmatrix} &= \det(SI - A + PC) \det(SI - A + BK) \\ &= Q_e(s) Q_x(s) = Q(s), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $Q_e(s)$ 、 $Q_x(s)$ 分别表示观测子系统的特征方程式与状态反馈控制子系统的特性方程式, 并记 $Q_e(s) = \det(SI - A + PC)$, 以及 $Q_x(s) = \det(SI - A + BK)$. 如果在设计上安排 $Q_e(s) = 0$ 的极点比 $Q_x(s) = 0$ 的极点远离 S 平面的虚轴, 则 $Q_e(s)$ 的动态响应持续时间会非常短暂, 故 $Q(s)$ 可近于 $Q_x(s)$. 这里以对象特性 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ (时间单位为分) 构成观测子系统与反馈控制子系统为例说明. 为了在计算机上仿真, 将 $G(s)$ 改写成离散状态方程式, 并按图2的方框图组成仿真系统, 其中 $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$, $C = [1, 0]$, 并选择 $P = [P_1 \ P_2] = [0.507 \ 1.260]$, $K = [K_1 \ K_2] = [0.900 \ 1.175]$, 则可得到图3的仿真曲线. 图中斜影线部份为 X 与 Z 的动态误差, Z 与 y 的系统振荡角频约相差4倍. 在利用观测器的情况下, 系统输出 y 仍然可得到较好的响应.

为了适应分段观测器应用的需要, 对象状态方程必须有相应的结构形式的变化. 在这种场合下, 较常采用多输入与单输出的描述模型, 而不是经典的单控制输入与多状态输出的范型状态方程式. 一般范型结构是将 $G(s)$ 先转化成传递函数多项分式, 即 $G(s) = (\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0) / (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)$, 并记状态方程式与输出方程式为

$$\dot{X}(t) = A X(t) + Bu(t), \quad y(t) = C X(t), \quad (12)$$

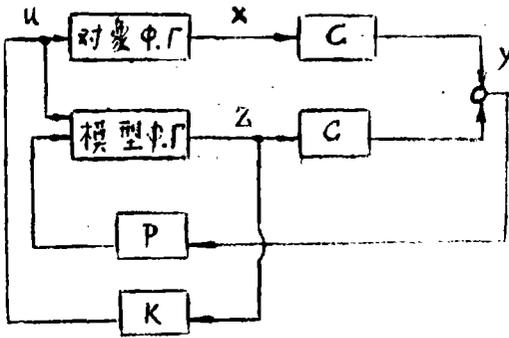


图2 观测子系统状态反馈的仿真框图

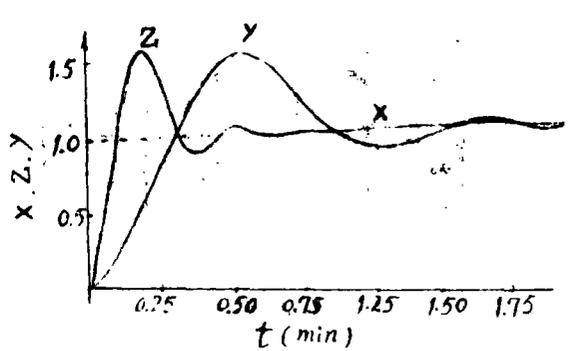


图3 $G(s)$ 仿真观测状态与输出的响应曲线

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_{n-1}].$$

这种范型结构,需检测 n 个状态,不适用于分段观测器系统. 有两种范型的状态方程式结构适用于分段观测系统. 若将传递函数多项式改写成 $X(s) = \frac{1}{s} [a_{n-1}X(s) - \beta_{n-1}(s)] + \frac{1}{s^2} [a_{n-2}X(s) - \beta_{n-2}u(s)] + \cdots + \frac{1}{s^{n-1}} [a_1X(s) - \beta_1u(s)] + \frac{1}{s^n} [a_0X(s) - \beta_0u(s)]$, 其结构方框图如图4所示,称范型(I)结构. 此时系统状态矩阵 A , 控制输入向量 B 与输出向量 C 分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

另一种适用于观测系统的范型状态方程式结构如图5所示,称范型(II). 系统状态为

$$X_i = \frac{1}{s} (X_{i-1} + h_i u), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (13)$$

$$X_n = \frac{1}{s} (-a_0 X_1 - a_1 X_2 - \cdots - a_{n-1} X_n + h_n u). \quad (14)$$

式(14)可写成

$$(s + a_{n-1}) X_{n-1} = (-a_0 X_1 - a_1 X_2 - \cdots - a_{n-2} X_{n-1} + h_n u). \quad (15)$$

连续应用式(13)与(15),可得

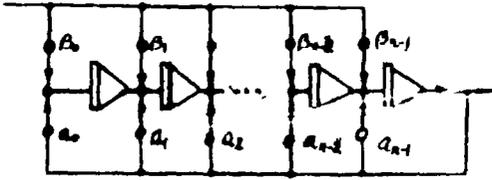


图 4 范型(I)结构

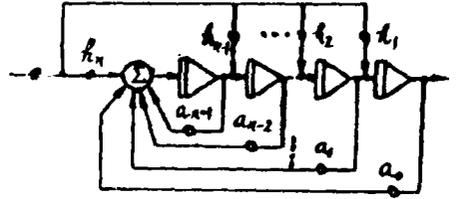


图 5 范型(III)结构

$$\begin{aligned}
 (s + a_{n-1})(sX_{n-1} - h_{n-1}u) &= s(s + a_{n-1})X_{n-1} - (s + a_{n-1})h_{n-1}u \\
 &= -a_0X_1 - a_2X_2 - \dots - a_{n-3}X_{n-2} - a_{n-2}X_{n-1} + h_n u \\
 (s^2 + a_{n-1}s + a_{n-2})X_{n-1} - (s + a_{n-1})h_{n-1}u & \\
 &= -a_0X_1 - a_1X_2 - \dots - a_{n-4}X_{n-3} - a_{n-3}X_{n-2} + h_n u \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

最后可得 $(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)X_1 = (\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_{n-i}s^{n-i} + \dots + \beta_1s + \beta_0)u$, 其中

$$\begin{cases}
 \beta_{n-1} = h_1, \\
 \beta_{n-2} = h_2 + a_{n-1}h_1, \\
 \beta_{n-3} = h_3 + a_{n-2}h_1 + a_{n-1}h_2, \\
 \vdots \\
 \beta_{n-i} = h_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{n+j-i}h_j.
 \end{cases} \tag{16}$$

状态方程的结构如图 5 所示,其状态方程的系统有关矩阵与向量可记为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_N &= \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_1 &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0].
 \end{aligned}$$

显然

$$\det(SI - \mathbf{A}_1) = \det(SI - \mathbf{A}_N)$$

因此,证明结构 I 与结构 III 的基本特性是完全一致的. 通常所表示的状态方程结构,称之为 (I)型. 由于它在各种现代控制理论中均普通采用,故这里不拟累述. (I)型状态方程只有当分段的对象传递函数的分子多项式为零阶时才可以采用.

3 典型的生产过程状态反馈的观测与控制

生产过程的被控制对象,从本质上分析是属于分布参数特性. 低阶集中参数模型很难准确

描述这样的对象特性。通常采用 $G(s) = K_0 / (Ts + 1)^n$ 或 $G(s) = K_0 / s(Ts + 1)^n$ ，其阶次 n 均必须足够高，如 $n \geq 6$ 以上，但是生产过程依照设备或流程均存在许多中间可检测的信号，所以解决高阶对象的控制是采用分段观测器，如 $G(s) = 1 / (10s + 1)^{10}$ 的对象可分解成 $G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)$ ，其中 $G_1(s) = G_2(s) = 1 / (10s + 1)^2$ ， $G_3(s) = G_4(s) = 1 / (10s + 1)^3$ ，并构成如图6所示，各子系统的状态方程的有关参数矩阵与向量分别为

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \\ C_1 = C_2 = [1 \quad 0],$$

$$A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.01 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \\ C_3 = C_4 = [1 \quad 0 \quad 0].$$

并可按 $\det(sI - A + PC) = 0$ 的根，有负实部的条件来选择 P 向量，如第3与第4观测器可取 $P = [P_1 \ P_2 \ P_3] = [0.1 \ 0.1 \ 0.001]$ 。于是可利用观测状态 Z 来代替 X 进行反馈控制，并按式(6)的 K 参数，可以得到同理想状态非常近似的控制效果。由于 P 的选择范围很大，因此观测器具有很宽调整范围的参数。 Z_4 观测器的组成同 Z_3 完全相同，差别仅是观测器的输入略有不同，前者为 u 与 X_3 ，后者为 X_3 与 X_5 。 Z_1 与 Z_2 的观测器更加简单。

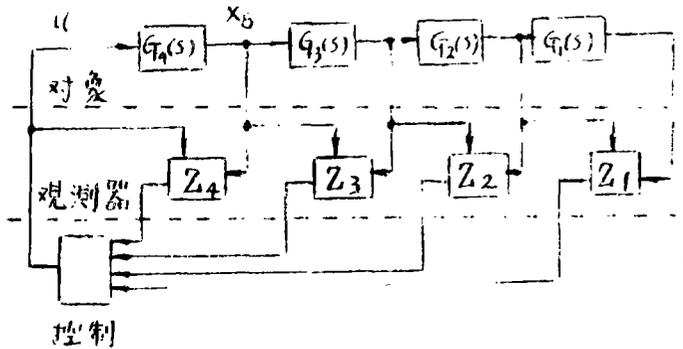


图6 分段状态观测控制系统

分段观测器的优点，是避免全阶观测器高频噪声难于克服的困难，以及显著的优点是增加系统控制的鲁棒性。鲁棒性问题是现代控制系统设计一个至关重要的问题。分段观测器具有与全阶观测器控制系统一样的系统响应速度及跟踪给定值信号变化的性能，同时有多回路串级中间微分的结构特点，因此能改善系统内扰与外扰的平抑功能，并且通过观测器系数向量 θ 的合理选择，可以改善局部对象易变参数的变化引进整体系统稳定性的降低。从以上诸方面观察，分段观测器以及多输入与单输出的状态方程式结构，有利于生产过优化控制系统的实现，有利于提高控制系统的鲁棒性。分段观测器的反馈控制系统响应的仿真曲线与图1的曲线2相同。其应用的另一个优点是系统综合方便，不仅可以采用一般的二次型最优准则函数，即 $J = \int_0^t (X^T R X + U^T Q U) dt \rightarrow \min$ ，确定最优反馈矩阵 K ，而且可以采用比较灵活的零极点校正及补偿设计方法。这是另一个重要内容，以后将陆续介绍。我们在研究中，还寻找数字分段观测器固有延时一拍的解决办法，以及利用互补的方法实现降阶观测器，这些内容以后再作专题介

绍.

4 小结

本文提出的分段观测器与工程应用的状态方程等价结构模式,可望使生产过程控制系统设计突破经典的PID控制.可以认为,模型分离是控制决策分离的前提,而按自然结构分离比单纯按数学模型分离更加符合工程系统的实际.由于状态分离的分组化,串级控制的子对象目标不再是含糊不清,各个状态对于系统的作用关系明确,其结果将导致二次型目标函中的权函数 R 与 Q ,可完全依照生产过程的客观要求来选择.这是解决现代控制理论与生产过程问题联系的一个关键.

分段观测器要求有同分段控制相对应的状态方程式结构,有简单的描述形式可接收控制输入与分段外状态的输入,是目前生产过程前馈、串级、自适应等控制必须具备的条件.文中提供的自然结构模型完全符合这个要求.

参 考 文 献

- [1] Frenklin, G. E., Powell, J. D. and Workman, M. H., *Digital Control System*, Addison-Wesiley, (1990).
- [2] Rosenbrock, H. H., *State Space and Multivariable Theory*, Wiley, (1970).
- [3] 王永初、任秀珍,自动化系统设计的系统学,重庆出版社, (1989).
- [4] 王永初等,现代调节器及其应用,重庆出版社, (1986).
- [5] Richard, C. D., *Modern Control System*, Addison-Wesiley, (1989).
- [6] Dorf, R. C. and Jacquot, R., *Control System Design Program*, Addison-Wesiley, (1988).
- [7] Wan Loan, C. F., *IEEE. Trans.*, A-C 23, 3(1978), 256—271.

Equivalent Construction of the State Equation of a Control System and Its Application

Wang Yongchu

(Department of Precision Mechanical Engineering)

Abstract The state equation of a control system has a lot of interconvertible constructions, which can be transformed to fit in with the demand of actual application. In this paper, a sectional state observer is proposed to be used to increase the number of state feedback and to decrease the level of pollution from industrial noise and differential operation. By increasing the number of state feedback, the system response can be speeded up. For this reason, the adoption of a combined sectional observer in a higher dimensional control system is proposed.

Key words observer, state feedback, noise pollution