

椭圆环电流在各向异性介质中的磁场

林文枝 陈燊年

(电气技术系)

摘要 把文[3]给出各向异性磁矢势的积分公式,表成在各向异性直角坐标系中的形式,求得在此坐标系中圆环电流的磁场,并通过坐标变换,求得椭圆环电流在各向异性介质中的磁场.

关键词 磁介质,各向异性,磁场,椭圆环电流

0 引言

圆环电流的磁场已见于各类参考书^[1,2]中,但对于圆环电流在各向异性介质中的磁场迄今未见有文献报道.近年,由于文^[3,4]首先推导出了各向异性磁矢势的积分公式,继后由文[5]利用此公式求得磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律,从而开始了在线性各向异性介质中求解若干种电流分布产生磁场的工作.这些工作包括文[6]的在各向异性介质中磁向量势的多极展开,文[5]的求载流直导线、载流圆线圈轴线上、载流直螺管内部及载流亥姆霍兹线圈的磁场等.但以上求解磁场时积分较简单,只迁到一个变量的积分.对于积分有两个变量的情况,文[7]给出了在各向异性直角坐标系中求解磁场的另一方法,从而求得载流二次曲线焦点的磁场.本文进而以文[7]方法来求圆环电流和椭圆环电流在线性各向异性介质中的磁场,从而把圆环电流的磁场由线性各向同性介质推广到线性各向异性介质的普遍情况.文中用到了第一种和第二种全椭圆积分.取它们级数的前几项,因而具体只计算了远处和近轴处的磁场,并在介质退化为线性各向同性时,验证了结果正确性.

1 各向异性磁矢势在各向异性直角坐标系中的形式

文[3]给出了各向异性磁矢势在各向同性直角坐标系的形式

本文1992-07-06收到.

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') dV'}{\left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}}\right)^{1/2}}, \quad (1)$$

式中, $\vec{J}(\vec{x}') = a_{1j_1}(\vec{x}')\vec{e}_1 + a_{2j_2}(\vec{x}')\vec{e}_2 + a_{3j_3}(\vec{x}')\vec{e}_3$, $a_1 = (\mu_{22}\mu_{33}/\mu_{11})^{1/2}$, $a_2 = (\mu_{11}\mu_{33}/\mu_{22})^{1/2}$, $a_3 = (\mu_{11}\mu_{22}/\mu_{33})^{1/2}$. 并有 $dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$, $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$, \vec{R} 为由 \vec{x}' 矢端(源点)指向 \vec{x} 矢端(场点)的位矢. 如图1所示.

现在引入各向异性直角坐标系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 如下

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\mu_{11}}}, \xi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\mu_{22}}}, \xi_3 = \frac{x_3}{\sqrt{\mu_{33}}}. \quad (2)$$

因而有式(3)、(4)

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}} d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3, \quad (3)$$

$$y = \left[\frac{(x_1 - x'_1)^2}{\mu_{11}} + \frac{(x_2 - x'_2)^2}{\mu_{22}} + \frac{(x_3 - x'_3)^2}{\mu_{33}} \right]^{1/2} = \left(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

如图2所示. 把式(2)、(3)、(4)代入式(1)中, 得

$$\vec{A}(\vec{\xi}) = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{\xi}') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3}{y}. \quad (5)$$

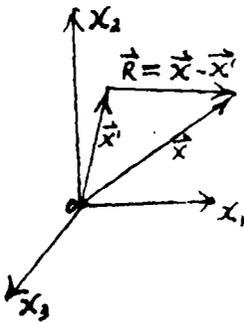


图1 在各向同性坐标系中, $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$ 图

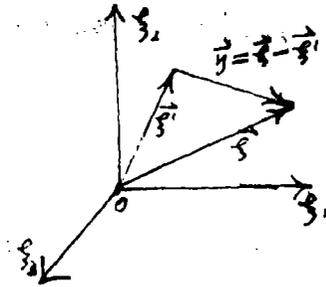


图2 在各向异性坐标系中, $y = \xi - \xi'$ 图

当电流作线分布时, 式(5)可表为线电流积分形式. 这是因为, $\vec{J}(\vec{\xi}') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3$ 在各向异性直角坐标系和在各向同性直角坐标系中可分别表为

$$\vec{J}(\vec{\xi}') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = I_c(\vec{\xi}') d\vec{l}'_c, \quad (6)$$

$$\vec{J}(\vec{\xi}') d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = \vec{J}(\vec{x}') \frac{dx'_1 dx'_2 dx'_3}{\sqrt{\mu_{11}} \sqrt{\mu_{22}} \sqrt{\mu_{33}}} = \frac{s d\vec{l}'}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}. \quad (7)$$

式(6)、(7)中, $I_c(\vec{\xi}')$ 表示电流强度, S 为导线均匀横截面, $d\vec{l}'$ 为线元, 比较式(6)、(7), 可令

$$d\vec{l}_\xi = \frac{d\vec{l}'}{\sqrt{\mu_{11}}}, \tag{8}$$

$$I_\xi(\vec{\xi}') = J(\vec{x}') \frac{S}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}} = \left(\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}} j_1^2 + \frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}} j_2^2 + \frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}} j_3^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{S}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}. \tag{9}$$

把式(6)代入式(5)中,得

$$\vec{A}(\vec{\xi}) = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi} \oint I_\xi(\vec{\xi}') \frac{d\vec{l}_\xi}{y}, \tag{10}$$

式中各量都是各向异性坐标中 $\vec{\xi}, \vec{\xi}', y$ 的函数,故称上式为各向异性磁矢势在各向异性直角坐标系中的形式.

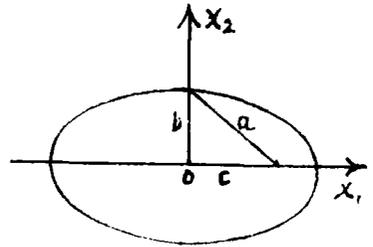
2 椭圆及球坐标参量在不同坐标系间的变换

设在各向同性直角坐标系的 x_1-x_2 平面上,有一长、短半轴为 a 和 b 的椭圆,如图3所示, 其方程为

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

若 $\mu_{11} > \mu_{22}$, 作式(2)的坐标变换,并令

$$a' = \frac{a}{\sqrt{\mu_{11}}} = \frac{b}{\sqrt{\mu_{22}}}, \tag{12}$$



代入式(11)得 $\xi_1^2 + \xi_2^2 = a'^2$, 这是一个半径为 a' 的圆周方程. 图3 长、短轴分别为 a, b 的椭圆图

以上表明,按式(2)变换,可把在各向同性直角坐标系中的一个椭圆变换成在各向异性直角坐标系中的一个圆周.这样,求椭圆环电流的磁场就转化为求较简单的圆环电流的磁场了.

此外,为了下文用处,要求出与球坐标有关的各参数及单位矢量,从各向异性坐标系到各向同性坐标系的变换关系.首先,以 θ' 和 ϕ' 分别表示在各向异性球坐标中的极角和方位角, 则有式(13)、(14)

$$\cos\theta' = \frac{\xi_3}{\xi} = \frac{\frac{x_3}{\sqrt{\mu_{33}}}}{\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2}}, \cos\phi' = \frac{\frac{x_1}{\sqrt{\mu_{11}}}}{\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} \right)^{1/2}}, \tag{13}$$

$$\sin\theta' = \left(\frac{\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}}}{\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}}} \right)^{1/2}, \sin\phi' = \frac{\frac{x_2}{\sqrt{\mu_{22}}}}{\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} \right)^{1/2}}. \tag{14}$$

在各向同性球坐标中,同理有以下式(15)、(16)

$$\cos\theta = \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \cos\varphi = \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (15)$$

$$\sin\theta = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \sin\varphi = \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (16)$$

其次,在各向同性球坐标和各向异性球坐标中,球坐标位矢的单位矢量,各是

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\vec{e}_\xi = \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{\mu_{11}}}\vec{e}_1 + \frac{x_2}{\sqrt{\mu_{22}}}\vec{e}_2 + \frac{x_3}{\sqrt{\mu_{33}}}\vec{e}_3\right)/\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因而,它们之间的变换关系为

$$\vec{e}_\xi = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{x_1}{\sqrt{\mu_{11}}}\vec{e}_1 + \frac{x_2}{\sqrt{\mu_{22}}}\vec{e}_2 + \frac{x_3}{\sqrt{\mu_{33}}}\vec{e}_3}{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3} \vec{e}_r. \quad (17)$$

再次,在各向同性球坐标中,球坐标极角的单位矢量,为 $\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = (r\cos\theta\cos\varphi\vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_2 - r\sin\theta\vec{e}_3) / (r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\varphi\vec{e}_2 - \sin\theta\vec{e}_3$. 同理,在各向异性球坐标系中,有 $\vec{e}_{\theta'} = \cos\theta'\cos\varphi'\vec{e}_1 + \cos\theta'\sin\varphi'\vec{e}_2 - \sin\theta'\vec{e}_3$. 因而,它们之间的变换关系为

$\vec{e}_{\theta'} = [(\cos\theta'\cos\varphi'\vec{e}_1 + \cos\theta'\sin\varphi'\vec{e}_2 - \sin\theta'\vec{e}_3) / (\cos\theta\cos\varphi\vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_2 - \sin\theta\vec{e}_3)]\vec{e}_\theta$. 把式(13)、(14)、(15)和(16)代入上式中,得

$$\vec{e}_{\theta'} = \left[\frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_2^2)}{\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}}\right)\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{x_1x_3}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}}\vec{e}_1 + \frac{x_2x_3}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}\vec{e}_2 - \left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}}\right)\vec{e}_3}{x_1x_3\vec{e}_1 + x_2x_3\vec{e}_2 - (x_1^2 + x_2^2)\vec{e}_3} \vec{e}_\theta. \quad (18)$$

3 在各向异性球坐标系中圆环电流的磁场

把式(10)所示的各向异性磁矢势在各向异性坐标中的形式,与通常见到的磁矢势公式

$$\vec{A}(\vec{x}) = \mu_0 I / 4\pi \oint (d\vec{e}' / |\vec{x} - \vec{x}'|)$$

相比较.可见,除积分号外的常数不同外,其它形式相似.因此,采用球坐标 (ξ, θ', φ') ,按通常在球坐标下求圆环电流的磁矢势的相同方法^[8].由式(10)亦可得

$$A_{(\xi, \theta', \varphi')} = A_{\varphi'} = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}a' I_{\xi}(\vec{\xi}')}{\pi \sqrt{\xi'^2 + a'^2 + 2\xi a' \sin\theta'}} \left[\frac{(2 - k^2)K - 2E}{k^2} \right], \quad (19)$$

式中 a' 是在各向异性球坐标中圆环电流的半径,而 k 是

$$k = \left(\frac{4\xi a' \sin\theta'}{\xi^2 + a'^2 + 2\xi a' \sin\theta'} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

K 和 E 分别是第一种全椭圆积分和第二种全椭圆积分, 即

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi'}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \right)^2 k^6 \dots \right], \quad (21)$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi'} d\psi' = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \right)^2 \frac{k^6}{5} \dots \right]. \quad (22)$$

对于远场 ($\xi \gg a'$) 和近轴场 ($\theta' \cong 0$ 或 π), 有 $\xi^2 + a'^2 \gg 2\xi a' \sin\theta'$, $k^2 \ll 1$. 这时对 K 和 E 只需取到其级数中的第 k^4 项就够了, 即 $\frac{1}{k^2} [(2 - k^2)K - 2E] \cong \frac{\pi}{2k^2} [(2 - k^2)(1 - \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64}k^4) - 2(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3}{64}k^4)] = \frac{\pi}{16}k^2$,

代入式(19)中, 并利用式(20)得

$$A_{\varphi'} \cong \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{4} a'^2 I_{\xi}(\xi') \frac{\xi \sin\theta'}{(\xi^2 + a'^2)^{3/2}}. \quad (23)$$

这就是在各向异性球坐标系中圆环电流在远处和近轴处的磁矢势.

若在各向异性球坐标系中引入算符

$$\nabla_{\xi, \theta', \varphi'} = \vec{e}_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \vec{e}_{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta'} + \vec{e}_{\varphi'} \frac{1}{\xi \sin\theta'} \frac{\partial}{\partial \varphi'},$$

利用式(26)可求得圆环电流在远处和近轴处磁场

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\xi} &= \nabla_{\xi, \theta', \varphi'} \times \vec{A}_{(\xi, \theta', \varphi')} = \frac{1}{\xi \sin\theta'} \frac{\partial}{\partial \theta'} (\sin\theta' A_{\varphi'}) \vec{e}_{\xi} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi A_{\varphi'}) \vec{e}_{\theta} \\ &= \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{2} \frac{a'^2 I_{\xi}(\xi')}{(\xi^2 + a'^2)^{5/2}} \{ 2(\xi^2 + a'^2) \cos\theta' \vec{e}_{\xi} - (2a'^2 - \xi^2) \sin\theta' \vec{e}_{\theta} \}. \end{aligned} \quad (24)$$

在轴线上, $\theta' = 0$, 而有

$$\vec{B}_{\xi} = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{2} \frac{a'^2 I_{\xi}(\xi')}{(\xi^2 + a'^2)^{3/2}} \vec{e}_{\xi}. \quad (25)$$

对于远场, $\xi \gg a'$, 式(23)中分母的 a'^2 项还可略, 则

$$\vec{A}_{(\xi, \theta', \varphi')} = A_{\varphi'} \vec{e}_{\varphi'} \cong \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{4} a'^2 I_{\xi}(\xi') \frac{\xi \sin\theta'}{\xi^3} \vec{e}_{\varphi'} = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi} \vec{m}' \times \frac{\vec{\xi}}{\xi^3}. \quad (26)$$

式中 \vec{m}' 是在各向异性球坐标中圆环电流的磁矩

$$\vec{m}' = I_{\xi}(\xi') \pi a'^2 (\cos\theta' \vec{e}_{\xi} - \sin\theta' \vec{e}_{\theta}'), \quad (27)$$

式(26)可表为 $\vec{A}_{(\xi, \theta', \varphi')} = -(\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33})^{\frac{1}{2}} (4\pi)^{-1} \vec{m}' \times (\nabla_{\xi, \theta', \varphi'} \frac{1}{\xi})$. 按文[8]中的式(65)、(68)、

(74)可求得远处磁场为

$$\vec{B}_{\xi} = \nabla_{\xi, \theta', \varphi'} \times \vec{A}_{(\xi, \theta', \varphi')} = \frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}}}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m}' \cdot \vec{\xi}) \vec{\xi}}{\xi^5} - \xi^2 \vec{m}' \right]. \quad (28)$$

4 椭圆环电流在各向异性介质中的磁场

为了能利用式(24)的 \vec{B}_ϵ 来求各向同性坐标系中圆环电流磁场 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, 先引入中间矢量 \vec{A}' , $\vec{A}' = A'_1 \vec{e}_1 + A'_2 \vec{e}_2 + A'_3 \vec{e}_3$, 的三个分量定义为

$$A'_1 = \sqrt{\mu_{11}} A_1, A'_2 = \sqrt{\mu_{22}} A_2, A'_3 = \sqrt{\mu_{33}} A_3. \tag{29}$$

于是,把式(2)和式(29)代入 $\nabla \times \vec{A}$ 中得

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \vec{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial r_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}} \left(\frac{\partial A'_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A'_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}} \left(\frac{\partial A'_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A'_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}} \left(\frac{\partial A'_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A'_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 \\ &= \vec{\mu} \cdot \nabla_\epsilon \times \vec{A}', \end{aligned}$$

式中, ∇_ϵ 是在各向异性直角坐标系中的算符, 而并矢 $\vec{\mu}$ 是

$$\vec{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{\mu_{33}\mu_{11}}} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}} \vec{e}_3 \vec{e}_3. \tag{30}$$

故 \vec{B} 与 \vec{A}' 的旋度的关系为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \vec{\mu} \cdot \Delta \epsilon \times \vec{A}'. \tag{31}$$

由于任一矢量的旋度与选用何种坐标系无关, 因而有 $\nabla_\epsilon \times \vec{A}' = \nabla_{\epsilon, \theta, \varphi} \times \vec{A}'$. 于是, 式(31)中的 \vec{B} 可进一步通过 \vec{A}' 在各向异性球坐标系中的旋度来表出,

$$\vec{B} = \vec{\mu} \cdot \Delta \epsilon, \theta', \varphi' \times \vec{A}'. \tag{32}$$

其次来求中间矢量 \vec{A}' 与各向异性磁矢势 \vec{A} 的关系. 按式(29)在直角坐标系中, 它们之间关系为

$$\vec{A}' = \vec{\mu} \cdot \vec{A}. \tag{33}$$

式中, 并矢 $\vec{\mu}$ 为 $\vec{\mu} = \sqrt{\mu_{11}} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \sqrt{\mu_{22}} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \sqrt{\mu_{33}} \vec{e}_3 \vec{e}_3$, 其中 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 与球坐标单位向量 $\vec{e}_\epsilon, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ 的关系为, $\vec{e}_1 = \sin\theta' \cos\varphi' \vec{e}_\epsilon + \cos\theta' \cos\varphi' \vec{e}_\theta - \sin\theta' \sin\varphi' \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_2 = \sin\theta' \sin\varphi' \vec{e}_\epsilon + \cos\theta' \sin\varphi' \vec{e}_\theta + \cos\theta' \sin\varphi' \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \cos\theta' \vec{e}_\epsilon - \sin\theta' \vec{e}_\theta$. 把此式代入式(33)中, 得

在球坐标系中 \vec{A}' 与 \vec{A} 的关系为 $\vec{A}' = (\sqrt{\mu_{11}} A_1 \sin\theta' \cos\varphi' + \sqrt{\mu_{22}} A_2 \sin\theta' \sin\varphi' + \sqrt{\mu_{33}} A_3 \cos\theta') \vec{e}_\epsilon + (\sqrt{\mu_{11}} A_1 \cos\theta' \cos\varphi' + (\sqrt{\mu_{22}} A_2 \cos\theta' \sin\varphi' - \sqrt{\mu_{33}} A_3 \sin\theta')) \vec{e}_\theta + (\sqrt{\mu_{22}} A_2 \cos\varphi' - \sqrt{\mu_{11}} A_1 \sin\varphi') \vec{e}_\varphi$. 由式(19)或(23)可见, \vec{A} 只有 φ' 分量, 而且 A_φ' 只依赖于 ϵ, θ' 而与 φ' 无关. 因此, 我们可以选定 $\epsilon_1 - \epsilon_2$ 面上的一点 $P(\epsilon, \theta', 0)$ 来计算. 如图4所示. 在该点上, 有 $A_\varphi' = A_2, A_1 = A_3 = 0, \sin\varphi' = 0, \cos\varphi' = 1$.

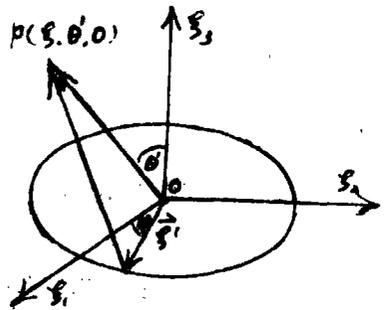


图4 在各向异性坐标系中计算 \vec{A} 的图

因而, \vec{A}' 与 \vec{A} 的关系化简为

$$\vec{A}' = \sqrt{\mu_{22}} A_{\varphi}' \vec{e}_{\varphi}, \quad (34)$$

式中 A_{φ}' 就是由式(23)给出的在各向异性球坐标系中圆环电流在远处和近轴处的磁矢势。

最后, 只需把式(34)代入式(32), 便得通过 \vec{B}_{ξ} 来表示出的圆环电流在各向异性磁介质中于远处和近轴处时的场为

$$\vec{B} = \sqrt{\mu_{22}} \vec{\mu} \cdot \nabla_{\xi, \theta', \varphi}' \times A_{\varphi}' \vec{e}_{\varphi} = \sqrt{\mu_{22}} \vec{\mu} \cdot \vec{B}_{\xi}. \quad (35)$$

因而, 用式(24)和式(27)、(28)分别代入式(35)中, 得近轴场

$$\vec{B} = \frac{\mu_{22} \sqrt{\mu_{11} \mu_{33}} a'^2 I_{\xi} \vec{\mu}}{4(\xi^2 a'^2)^{5/2}} \cdot \{2(\xi^2 + a'^2) \cos \theta' \vec{e}_{\xi} - (2a'^2 - \xi^2) \sin \theta' \vec{e}_{\theta}'\} \quad (36)$$

和远处场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_{22} \sqrt{\mu_{11} \mu_{33}} \vec{\mu}}{4\pi} \cdot \left[\frac{3I_{\xi} \pi a'^2 (\cos \theta' \vec{e}_{\xi} \cdot \vec{\xi} - \sin \theta' \vec{e}_{\theta}' \cdot \vec{\xi}) \vec{\xi} - \xi^2 I_{\xi} \pi a'^2 (\cos \theta' \vec{e}_{\xi} - \sin \theta' \vec{e}_{\theta}')}{\xi^5} \right]. \quad (37)$$

在以上式(36)、(37)中, a' 、 ξ 、 I_{ξ} 、 $\cos \theta'$ 、 $\sin \theta'$ 、 \vec{e}_{ξ} 以及 \vec{e}_{θ}' 等都是各向异性坐标系中的量, 现在应把它们变换成在各向同性坐标系中相应的量. 因此, 以式(12)、(13)、(9)、(14)、(17)、(18)以及式(30)分别代入式(36)和(37)中, 就得到在通常各向同性直角坐标系中椭圆电流环在磁各向异性介质中于近轴处和远处的磁场.

作为特例, 观察在轴线上的场, 先用式(12)和式(2)、(9)代入式(25)中, 得

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\xi} &= \nabla_{\xi, \theta', \varphi}' \times A_{\varphi}' \vec{e}_{\varphi} \\ &= \frac{a'^2 s}{2 \sqrt{\mu_{11}}} \left(\frac{\mu_{22} \mu_{33}}{\mu_{11}} j_1^2 + \frac{\mu_{11} \mu_{33}}{\mu_{22}} j_2^2 + \frac{\mu_{11} \mu_{22}}{\mu_{33}} j_3^2 \right)^{1/2} \frac{\vec{e}_{\xi}}{\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} + \frac{b^2}{\mu_{22}} \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

因为在轴上, 按式(30)有 $\vec{\mu} \cdot \vec{e}_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{11} \mu_{22}}} \vec{e}_3$. 于是, 把式(38)代入式(35)中得到在轴上的场为

$$\vec{B} = \frac{a'^2 s}{2 \mu_{11}} \left(\frac{\mu_{22} \mu_{33}}{\mu_{11}} j_1^2 + \frac{\mu_{11} \mu_{33}}{\mu_{22}} j_2^2 + \frac{\mu_{11} \mu_{22}}{\mu_{33}} j_3^2 \right)^{1/2} \frac{\vec{e}_3}{\left(\frac{x_1^2}{\mu_{11}} + \frac{x_2^2}{\mu_{22}} + \frac{x_3^2}{\mu_{33}} + \frac{a^2}{\mu_{11}} \right)^{3/2}}, \quad (39)$$

此式也可由(36)式, 令 $\theta' = 0$, $\vec{e}_{\xi} = \vec{e}_3$ 求得.

当 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ 时, 即当介质为线性各向同性时, 对圆讲, 由(39)式得

$$\vec{B} = \frac{\mu I a}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \vec{e}_3. \quad (40)$$

这就是在线性各向同性磁介质中圆环电流在圆的轴线上的磁场.

当 $x=0$ 时, 圆周中心的场为 $\vec{B} = \frac{\mu I}{2a} \vec{e}_3$, 是所预期的结果.

参 考 文 献

- [1] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc, (1962).
[2] Elliott, R. S., *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York, (1966).
[3] Xinnian, C., Jie C. *JOURNAL OF ELECT-RONLCS (china)*, 8(1991), 247—257.
[4] 陈秉年、陈洁, 各向异性磁介质的电感新公式, 电子科学学刊, 2(1991).
[5] 王建成、陈秉年, 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用, 华侨大学学报, 2(1989).
[6] 王建成、陈秉年, 在各向异性介质中磁向量势的多极展开, 华侨大学学报, 1(1990).
[7] 林文枝、陈秉年, 在各向异性磁介质中载流二次曲线焦点的磁场, 华侨大学学报, 4(1992).
[8] 张之翔等, 电动力学, 气象出版社, 1988, 138—148.

Magnetic Field of Elliptical Ring Current in Anisotropic Medium

Lin Wenzhi Chen Xinnian

(*Department of Electric Technique*)

Abstract An integral formula of anisotropic magnetic vector potential as given by ref. 3 is employed. It is expressed as the form in an anisotropic rectangular coordinates system in which the magnetic field of elliptical ring current is derived. The magnetic field of elliptical ring current in anisotropic medium is then obtained through coordinate transformation.

Key word magnetic dielectrics anisotropy, magnetic fields, elliptical ring current